Devoir du 3 Mars 2003 

Neutronique (méthodes de calcul)

## (1) Etude de la constante de relaxation

L'hypothèse de départ est que le flux $\Phi(E, \Omega, x)$ est de la forme

$$\Phi = \varphi(E, \Omega)\, e^{-\chi x}$$

où $\chi$ est appelée constante de relaxation. Les neutrons sont monocinétiques. L'approximation retenue sera P1 ou P2, c'est à dire la décomposition du flux sur les 2 ou 3 premiers polynômes de Legendre.

1. Les équations décomposées sur la base de polynômes sont en géométrie plane

$$-\frac{1}{3}\Phi'_1 - \Sigma_t \Phi_0 + \Sigma_{s,0}\Phi_0 + S_0 = 0 \qquad \text{où } \Phi'_i = \frac{\partial \Phi_i}{\partial x}$$

$$-\Phi'_0 - \frac{2}{5}\Phi'_2 - \Sigma_t \Phi_1 + \Sigma_{s,1}\Phi_1 + S_1 = 0$$

$$-\frac{n}{2n-1}\Phi'_{n-1} - \frac{n+1}{2n+3}\Phi'_{n+1} - \Sigma_t \Phi_n + \Sigma_{s,n}\Phi_n + S_n = 0$$

et pour le dernier ordre N :

$$-\frac{N}{2N-1}\Phi'_{N-1} - \Sigma_t \Phi_N + \Sigma_{s,N}\Phi_N + S_N = 0$$

a/ Cas sans source et avec diffusion isotrope

Sans source signifie $\forall i \quad S_i = 0$

Diffusion isotrope signifie

$$\Sigma_s(x, \mu) = \Sigma_{s,0}(x) P_0(\mu) + \Sigma_{s,1}(x) P_1(\mu) + \Sigma_{s,2}(x) P_2(\mu)$$

$$\Sigma_s(x, \mu' \to \mu) = \Sigma_s(x)\, P(\mu' \to \mu) = \frac{1}{2}\Sigma_s(x)$$

$$P(\mu' \to \mu) = 1/2 \quad \text{puisque } P(\mu' \to \mu) = \text{cte et } \int_{-1}^{+1} P(\mu' \to \mu)\, d\mu' = 1$$

On a démontré par ailleurs, que dans ce cas :

$$\Sigma_{s,0} = \Sigma_s \qquad \Sigma_{s,1} = 0 \qquad \Sigma_{s,2} = 0 \quad \text{etc.}$$

puisque $P_0(\mu) = 1 \quad P_1(\mu) = \mu \quad P_2(\mu) = \frac{3\mu^2 - 1}{2}$

et que $\Sigma_{s,0} = \int_{-1}^{+1} \Sigma_s(x, \mu' \to \mu) P_0(\mu)\, d\mu' = \frac{\Sigma_s}{2}\int_{-1}^{+1} 1 . d\mu' = \Sigma_s$

1,5

$$\Sigma_{s,1} = \int_{-1}^{+1} \frac{\Sigma_s}{2} P_1(\mu) = \int_{-1}^{+1} \frac{\Sigma_s}{2}\mu' d\mu' = 0$$

$$\Sigma_{s,2} = \int_{-1}^{+1} \frac{\Sigma_s}{2}\left(\frac{3\mu^2 - 1}{2}\right) d\mu = \frac{\Sigma_s}{2}\left[\frac{\mu^3}{2} - \frac{\mu}{2}\right]_{-1}^{+1} = 0$$

b/ Les équations énoncées ci-dessus deviennent :

$$-\frac{1}{3}\Phi'_1 - \Sigma_t \Phi_0 + \Sigma_s \Phi_0 = 0$$

$$-\Phi'_0 - \cancel{\frac{2}{5}\Phi'_2} - \Sigma_t \Phi_1 = 0$$ (on s'arrête à l'approximation $P_1$)

L'hypothèse étant que le flux est sous une forme $\varphi_i e^{-\chi x}$, les dérivées par rapport à $x$ donnent $-\chi \varphi_i e^{-\chi x}$, soit :

$$\left.\begin{array}{l} -\frac{\chi}{3}\varphi_1 - \Sigma_a \varphi_0 = 0 \\ -\chi\varphi_0 - \Sigma_t \varphi_1 = 0 \end{array}\right\}$$

Le système ne peut être non nul que si le déterminant est nul, soit

$$\frac{\chi^2}{3} - \Sigma_a \Sigma_t = 0 \qquad \boxed{\chi = \sqrt{3\Sigma_a\Sigma_t}}$$ (1,5)

c/ Dans le cas de l'approximation P2, on arrive à un système de 3 équations :

$$-\Sigma_a \Phi_0 - \frac{1}{3}\Phi'_1 = 0$$

$$-\Phi'_0 - \Sigma_t \Phi_1 - \frac{2}{5}\Phi'_2 = 0$$

$$-\frac{2}{3}\Phi'_1 - \Sigma_t \Phi_2 = 0$$

Le modèle de flux et les dérivées par rapport à $x$ conduisent au système :

$$\left.\begin{array}{lllr} -\Sigma_a\varphi_0 & +\frac{\chi}{3}\varphi_1 & & = 0 \\ \chi\varphi_0 & -\Sigma_t\varphi_1 & +\frac{2\chi}{5}\varphi_2 & = 0 \\ 0 & \frac{2\chi}{3}\varphi_1 & -\Sigma_t\varphi_2 & = 0 \end{array}\right|$$

qui ne peut exister que si le déterminant $3\times 3$ est nul.

Condition de criticité :

$$\begin{vmatrix} -\Sigma_a & \frac{\chi}{3} & 0 \\ \chi & -\Sigma_t & \frac{2\chi}{5} \\ 0 & \frac{2\chi}{3} & -\Sigma_t \end{vmatrix} = -\Sigma_t^2\Sigma_a + \frac{4}{15}\Sigma_a\chi^2 + \frac{\Sigma_t}{3}\chi^2 = 0$$

soit à prendre $$\boxed{\chi = \sqrt{\frac{3\Sigma_a\Sigma_t}{1+\frac{4}{5}\frac{\Sigma_a}{\Sigma_t}}}}$$ (1)

Dans l'approximation $P_1$ on reconnaîtra le terme $\chi = \frac{1}{L} = \sqrt{\frac{\Sigma_a}{D}}$

## 2. Approximation plane du flux en phase.

a/ Nous avons l'équation exacte :

$$-\mu \frac{\partial \phi(x,\mu)}{\partial x} - \Sigma_t \phi(x,\mu) + \int_{-1}^{+1} \Sigma_s(\mu' \to \mu)\, \phi(x,\mu')\, d\mu' + S(x,\mu) = 0$$

b/ Cas sans source et avec diffusion isotrope

Pas de source : $S(x,\mu) = 0$

diffusion isotrope $\Sigma_s(\mu' \to \mu) = \Sigma_s\, P(\mu' \to \mu) = A\, \Sigma_s$

en nommant la probabilité, $P(\mu' \to \mu) = 1/2$ (vue précédemment en 1/)

Cela va donc conduire à l'équation :

$$\boxed{-\mu \frac{\partial \phi(x,\mu)}{\partial x} - \Sigma_t \phi(x,\mu) + \int_{-1}^{+1} \frac{\Sigma_s}{2} \phi(x,\mu')\, d\mu' = 0}$$

1,5

c/ En reprenant le modèle de flux $\phi(x,\mu) = \varphi(E,\mu)\, e^{-\chi x}$
et en dérivant, on obtient l'équation :

$$\mu \chi \varphi(\mu) - \Sigma_t \varphi(\mu) + \frac{\Sigma_s}{2} \int_{-1}^{+1} \varphi(\mu')\, d\mu' = 0$$

Comme l'énoncé nous le suggère, divisons par $\Sigma_t - \mu\chi$.
Nous obtenons l'équation intégrale

$$\varphi(\mu)\left[\Sigma_t - \mu\chi\right] = \frac{\Sigma_s}{2} \int_{-1}^{+1} \varphi(\mu')\, d\mu'$$

soit $\boxed{\varphi(\mu) = \frac{\Sigma_s}{2(\Sigma_t - \mu\chi)} \cdot \int_{-1}^{+1} \varphi(\mu')\, d\mu'}$ 1,5 $= u'$ (voir ci-dessous)

L'intégration se fait alors facilement (rappel de mathématiques du texte)

$$u' = \frac{\Sigma_s}{2(\Sigma_t - \mu\chi)} \qquad u = \frac{\Sigma_s}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{d\mu}{\Sigma_t - \mu\chi} = \frac{\Sigma_s}{2\chi} \ln \frac{\Sigma_t + \chi}{\Sigma_t - \chi}$$

$$v = cte = \int_{-1}^{+1} \varphi(\mu')\, d\mu' \qquad v' = 0$$

l'intégrale sur $\mu$ est constante (à $x$ près)

$$\int_{-1}^{+1} \varphi(\mu)\, d\mu = \frac{\Sigma_s}{2\chi} \ln \frac{\Sigma_t + \chi}{\Sigma_t - \chi} \cdot \int_{-1}^{+1} \varphi(\mu')\, d\mu'$$

De cette équation on tire :

$$\boxed{\chi = \frac{\Sigma_s}{2} \ln \frac{\Sigma_t + \chi}{\Sigma_t - \chi}}$$ puisque l'intégrale est un scalaire

(-1,5)

3/ Comparaisons numériques :

Valeur approchée en approximation P1

$\chi_1 = \sqrt{3 \Sigma_a \Sigma_t} = 0,5477$ pour $\Sigma_a = 0,1$ $\Sigma_s = 0,9$

$\chi_1 = \sqrt{3 \Sigma_a \Sigma_t} = 1,2247$ pour $\Sigma_a = 0,5$ $\Sigma_s = 0,5$

(1)

En approximation $P_2$ :

$$\chi_2 = \sqrt{\frac{3 \Sigma_a \Sigma_t}{1 + \frac{4}{5}\frac{\Sigma_a}{\Sigma_t}}} = \sqrt{\frac{0,3}{1 + \frac{0,4}{5}}} = 0,527 \text{ cm}^{-1}$$

$$\chi_2 = \sqrt{\frac{1,5}{1 + \frac{2}{5}}} = 1,0351 \text{ cm}^{-1}$$

(1)

La valeur exacte est obtenue par la formule précédente :

$$\chi_{exacte} = \frac{0,9}{2} \ln \frac{1 + \chi_{ex}}{1 - \chi_{ex}}$$ qu'il faut résoudre par itération successive autour des valeurs précédentes.

On trouve les deux valeurs approchées :

pour $\Sigma_t = 1$ et $\Sigma_a = 0,1$ $\chi_{ex}$ 0,5254 $\chi_2$ 0,527 $\chi_1$ 0,5477

$\Sigma_t = 1$ et $\Sigma_a = 0,5$ $\chi_{ex}$ 0,9575 $\chi_2$ 1,035 $\chi_1$ 1,225

L'écart est d'autant plus important que le milieu est diffusant. Même l'approximation $P_2$ est insuffisante si le milieu est trop absorbant

$\chi_2 = 1,035$ à 8,1% de la valeur exacte.

# ② Effet de l'oxygène et de l'U235 sur l'autoprotection de l'U238

Rappels : la section efficace de dilution est définie par l'équation

$$\sigma_e = \sigma_0 \, \frac{1 - P_{00}}{P_{00}}$$

$\sigma_0$ Section efficace microscopique du noyau résonnant

$P_{00}$ probabilité qu'un neutron émis dans le milieu résonnant subisse sa première collision sur un noyau résonnant.

Modèle :

On suppose que O et U5 ne sont pas résonnant, et ont une section efficace constante en léthargie.

Soit $P_{cc}$ la probabilité qu'un neutron émis dans le combustible subisse sa première collision dans la zone combustible. Elle est donnée par :

$$P_{cc} = \frac{\bar{\ell}\,\Sigma_c}{b + \bar{\ell}\,\Sigma_c}$$

$\bar{\ell}$ corde moyenne

$\Sigma_c$ absorption totale du combustible

$b$ facteur de Bell

Soient $\Sigma_0$ pour l'U238

$\Sigma_5$ celle de l'U235

$\Sigma_{ox}$ celle de l'oxygène donc $\Sigma_c = \Sigma_0 + \Sigma_5 + \Sigma_{ox}$

## 1/ Exprimer $P_{00}$ en fonction de $P_{cc}$

La simple définition ($P_{00}$ pour le noyau résonnant) et ($P_{cc}$ pour un noyau du combustible) conduit à :

$$P_{00} = \frac{\Sigma_0}{\Sigma_c} P_{cc} \qquad (1)$$

Montrer que $\sigma_e$ se décrit alors à partir des $\Sigma_0$, $\Sigma_5$ et $\Sigma_{ox}$. Nous avons :

$$\sigma_e = \sigma_0 \frac{1 - P_{00}}{P_{00}} \qquad P_{00} = \frac{\Sigma_0}{\Sigma_c} P_{cc} \qquad P_{cc} = \frac{\bar{\ell}\,\Sigma_c}{b + \bar{\ell}\,\Sigma_c}$$

soit :

$$\sigma_e = \sigma_0 \frac{1 - \frac{\Sigma_0}{\cancel{\Sigma_c}} \frac{\bar{\ell}\,\cancel{\Sigma_c}}{b + \bar{\ell}\,\Sigma_c}}{\frac{\Sigma_0}{\cancel{\Sigma_c}} \frac{\bar{\ell}\,\cancel{\Sigma_c}}{b + \bar{\ell}\,\Sigma_c}} = \underbrace{\frac{\sigma_0\, b}{\Sigma_0\, \bar{\ell}}}_{\frac{b}{N_0 \bar{\ell}}} + \sigma_0 \overbrace{\underbrace{\frac{\cancel{\bar{\ell}}\,\Sigma_c - \cancel{\bar{\ell}}\,\Sigma_0}{\cancel{\bar{\ell}}\,\Sigma_0}}_{\frac{\Sigma_5 + \Sigma_{ox}}{N_0}}}^{\text{différence due à } U_5 \text{ et } Ox}$$

$$\frac{b}{N_0 \bar{\ell}} + \frac{\Sigma_5 + \Sigma_{ox}}{N_0}$$

Ce qui conduit donc à :

$$\boxed{\sigma_e = \frac{b}{N_0 \bar{\ell}} + \frac{\Sigma_5 + \Sigma_{ox}}{N_0}}$$

1,5

Le premier terme est appelé hétérogène et le second homogène

2/ Importance sur l'intégrale effective

$I_{eff} = 2{,}36 + 2{,}80\sqrt{\sigma_e}$ est une formule empirique donnée par le texte

On cherchera donc à comparer le facteur antitrappe sans ces effets, donné à 0,8 dans les données, à la valeur calculée à partir de $\sigma_e$.

Avec l'$U_5$ et l'oxygène, on trouve :

$N_0 = 96{,}3$

$N_5 = 3{,}7$ d'où $\frac{\Sigma_5 + \Sigma_{ox}}{N_0} = \frac{(38 \times 3{,}7) + (3{,}8 \times 200)}{96{,}3} = 9{,}652 \frac{cm^2}{10^{-24}}$

$N_{ox} = 200$

pour le terme hétérogène

Pour la valeur de $\sigma_e$ on aura donc $\sigma_e = 59{,}65$ barns

et donc pour $I_{eff} = 2{,}36 + 2{,}80\sqrt{59{,}65} = \underline{23{,}98 \text{ cm}}$

En ce qui concerne le calcul de p, on reprend le calcul de $I_{eff}$ avec la valeur de $\sigma_e$ sans le terme hétérogène, donc $\sigma_e = 50$

Ce qui conduit à : $I_{eff}$ (sans $U_5$ et Ox) $= \underline{22{,}16 \text{ cm}}$

Avec cette valeur on obtient la valeur de 0,8 pour p

Comme $p = \exp(-\alpha I_{eff})$ on en déduit que $\Delta \ln p = -\alpha \Delta I_{eff}$

Le coefficient de proportionnalité est calculé à partir de 0,8

$$\ln p = \ln(0{,}8) = -\alpha \cdot 22{,}16 \quad \text{d'où} \quad \alpha = 0{,}01007 \text{ cm}^{-1}$$

Et donc

$$P_{corrigé} = \exp(-0{,}01007 \times 23{,}98) = \underline{0{,}7854}$$

2

L'écart sur p induit une différence sur keff appréciable

$$\frac{k_{eff\,corrigé} - k_{eff\,approx}}{k_{eff\,approx}} = \frac{\Delta p}{p} = \frac{0{,}8 - 0{,}785}{0{,}8} = \underline{-1816 \text{ pcm}}$$

6/ Pour quelle concentration en $U_S$ les effets de l'$U_S$ et de l'oxygène sont-ils égaux ?

Il suffit donc simplement de prendre $\Sigma_S = \Sigma_{ox}$ (0,5)

soit $38\, N_S = 3{,}8\, N_{ox} = 200 . 3{,}8$ soit $N_S = 20\%$ de l'uranium

## (3) Flux adjoint en théorie à deux groupes.

En théorie à deux groupes, les équations (en situation critique) sont :

$$\begin{cases} D_1 \Delta \Phi_1 - \Sigma_1 \Phi_1 + \dfrac{k_\infty}{p} \Sigma_2 \Phi_2 = 0 \\ D_2 \Delta \Phi_2 - \Sigma_2 \Phi_2 + p \Sigma_1 \Phi_1 = 0 \end{cases}$$

Le flux est supposé nul en surface et le milieu est caractérisé par son laplacien géométrique $B^2$

Traduction de l'énoncé

a) dès que nous avons $\Delta \Phi$, on pourra le remplacer par $- B_g^2 \Phi$

b) la criticité se traduira par $\det(\text{système}) = 0$ pour éviter la solution triviale $\Phi_i = 0$.

1/ Criticité du système

Les équations deviennent :

$$-D_1 B_g^2 \Phi_1 - \Sigma_1 \Phi_1 + \frac{k_\infty}{p} \Sigma_2 \Phi_2 = 0$$

$$-D_2 B_g^2 \Phi_2 - \Sigma_2 \Phi_2 + p \Sigma_1 \Phi_1 = 0$$

Le flux s'établit selon le fondamental (flux nul en surface) à un coefficient près.

La condition de criticité devient donc :

$$\begin{vmatrix} -\Sigma_1 - D_1 B_g^2 & \dfrac{k_\infty}{p} \Sigma_2 \\ p \Sigma_1 & -\Sigma_2 - D_2 B_g^2 \end{vmatrix} = 0$$ (1)

soit : $\Sigma_1 \Sigma_2 k_\infty = (\Sigma_1 + D_1 B_g^2)(\Sigma_2 + D_2 B_g^2)$

$$k_\infty = (1 + L_1^2 B_g^2)(1 + L_2^2 B_g^2) \quad \text{où} \quad L_i^2 = \frac{D_i}{\Sigma_i}$$

Le rapport des flux s'obtient à partir de chacune des équations :

$$\boxed{\frac{\Phi_1}{\Phi_2} = \frac{\Sigma_2 k_\infty}{p \Sigma_1} \, \frac{1}{1 + L_1^2 B_g^2} = \frac{\Sigma_2}{p \Sigma_1} \cdot (1 + L_2^2 B_g^2)}$$ (0,5)

## 2/ Equations adjointes

On reprend toujours la criticité. $H\phi = 0$
Pour le flux critique adjoint, on aura donc $H^+\phi^+ = 0$
où $H^+$ est l'opérateur adjoint

$$H = \begin{vmatrix} D_1\Delta & 0 \\ 0 & D_2\Delta \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -\Sigma_1 & \Sigma_2 k_{\infty}/p \\ p\Sigma_1 & -\Sigma_2 \end{vmatrix}$$

L'opérateur adjoint s'obtient en transposant la matrice "énergie"

$$H^+ = \begin{vmatrix} D_1\Delta & 0 \\ 0 & D_2\Delta \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -\Sigma_1 & p\Sigma_1 \\ \Sigma_2 k_{\infty}/p & -\Sigma_2 \end{vmatrix}$$

Les deux équations permettant de calculer le flux adjoint sont donc :

$$\begin{cases} D_1\Delta\phi_1^+ - \Sigma_1\phi_1^+ + p\Sigma_1\phi_2^+ = 0 \\ D_2\Delta\phi_2^+ + \Sigma_2\dfrac{k_{\infty}}{p}\phi_1^+ - \Sigma_2\phi_2^+ = 0 \end{cases}$$

(1,5)

Les mêmes propriétés d'annulation à la surface conduisent à prendre les termes $\phi_1^+$ et $\phi_2^+$ comme proportionnels au fondamental.

$$\phi_1^+ = \varphi_1^+ f \quad \text{avec } f \text{ tel que } \Delta f = -B_g^2 f$$

Ce qui nous donne :

$$-B_g^2 D_1\varphi_1^+ - \Sigma_1\varphi_1^+ + p\Sigma_1\varphi_2^+ = 0$$

$$-B_g^2 D_2\varphi_2^+ + \frac{k_{\infty}}{p}\varphi_1^+ - \Sigma_2\varphi_2^+ = 0$$

Le système ne peut être trivial ($\varphi_1^+ = \varphi_2^+ = 0$). Il faut donc que le déterminant soit nul : condition de criticité identique évidemment.

$$\begin{vmatrix} -\Sigma_1 - D_1B_g^2 & p\Sigma_1 \\ \Sigma_2\dfrac{k_{\infty}}{p} & -\Sigma_2 - D_2B_g^2 \end{vmatrix} = 0$$

(0,5)

Le rapport des flux adjoints s'exprime alors comme :

$$\boxed{\frac{\phi_1^+}{\phi_2^+} = \frac{p}{1+L_1^2B_g^2} = p \times P_{nf}(\text{rapide}) \qquad \frac{\phi_2^+}{\phi_1^+} = \frac{k_{\infty}/p}{1+L_2^2B_g^2} = f\eta\, P_{nf}(\text{therm.})}$$

(0,5) (1)