Examen de neutronique du novembre 2006

Exercice 1 : cinétique ponctuelle à un groupe de neutrons retardés (7)

Soit $\theta = \ell k$ durée de vie

ℓ temps de génération, indépendant de k

k coefficient de multiplication effectif

1) équations de la cinétique ponctuelle

$$\frac{dn}{dt} = \left(k(1-\beta) - 1\right) n(t) \frac{1}{\theta} + \lambda c(t)$$

$$\frac{dc}{dt} = -\lambda c(t) + \frac{k\beta}{\theta} n(t)$$

en utilisant les notations du texte

$$\left.\begin{aligned} \frac{dn}{dt} &= \left[\frac{k-1}{\theta} - \frac{k\beta}{\theta}\right] n(t) + \lambda c(t) = \left(\frac{\rho-\beta}{\ell}\right) n(t) + \lambda c(t) \\ \frac{dc}{dt} &= \frac{\beta k}{\ell k} n(t) - \lambda c(t) = \frac{\beta}{\ell} n(t) - \lambda c(t) \end{aligned}\right\} (1,5)$$

$\beta = 0{,}7\,\%$ $\lambda = 0{,}1\ s^{-1}$ $\ell = 2.10^{-5}\ s$

2) équation de Nordheim

On suppose que $n = n_0 e^{\omega t}$ et $c = c_0 e^{\omega t}$

ce qui permet de retrouver l'équation de Nordheim

$$\begin{cases} \omega n = \frac{\rho-\beta}{\ell} n + \lambda c \\ \omega c = \frac{\beta}{\ell} n - \lambda c \end{cases} \quad \text{d'où } c = \frac{\beta}{\ell(\omega+\lambda)} n$$

$$\omega n = \frac{\rho-\beta}{\ell} n + \frac{\lambda\beta n}{\ell(\omega+\lambda)}$$ et en éliminant n, $\forall t$

$$\omega\ell + \beta - \frac{\lambda\beta}{\omega+\lambda} = \rho = \omega\ell + \frac{\omega\beta}{\omega+\lambda} = \underbrace{\omega\left[\ell + \frac{\beta}{\omega+\lambda}\right] = \rho}_{\text{équation de Nordheim}}$$

La résolution de cette équation conduit à deux solution selon les valeurs de ρ

$$\ell\omega^2 + (\beta - \rho + \ell\lambda)\omega - \rho\lambda = 0$$

Les solutions théorique sont (aucune approximation jusque là):

$$\omega = \frac{-(\beta-\rho+\ell\lambda) \pm \sqrt{(\beta-\rho+\ell\lambda)^2 + 4\ell\rho\lambda}}{2\ell}$$

La plus grande des valeurs (ω_+) correspond au terme en $+\sqrt{\Delta}$.

Application numérique :

ρ	$\omega_+ (s^{-1})$	$\omega_- (s^{-1})$
$\beta/2$	0,099886	−175,2
β	5,8663	−5,9663
$3\beta/2$	175,20	−0,2997

(1,5)

3) Cas de faibles réactivité

Si $\rho < \beta$ on peut négliger λ devant

l'équation de Nordheim devient :

$$\rho = \omega\left[\ell + \frac{\beta}{\lambda}\right]$$

ce qui conduit à une valeur approchée

$$\omega = \frac{\rho}{\ell + \beta/\lambda} \sim \frac{\lambda\rho}{\beta}$$ pour $\beta/2 = \rho$ on trouve $0{,}05\ s^{-1}$

et les deux valeurs "classiques" $\omega_0 = \dfrac{\lambda\rho}{\beta-\rho}$ et $\omega_1 = \dfrac{\rho-\beta}{\ell}$

sont trouvées en developpant la racine au premier ordre en ℓ :

(1,5)

$$\omega = \frac{-(\beta-\rho+\ell\lambda)}{2\ell}\left(1 \pm 1\left(1 + \frac{2\ell\rho\lambda}{(\beta-\rho+\ell\lambda)^2}\right)\right)$$

$$\omega \sim \frac{-(\beta-\rho)}{2\ell}\left(1 \pm \left(1 + \frac{2\ell\lambda\rho}{\beta-\rho}\right)\right)$$ en simplifiant $\underbrace{\ell}_{2\cdot10^{-5}}\ \underbrace{\lambda}_{0,1}$ devant $\underbrace{\beta-\rho}_{\text{quelques } 0,001}$

on constate qu'il y a un rapport 2 entre l'approximation

$$\underbrace{\omega \sim \frac{\lambda\rho}{\beta}}_{\text{approchée}} \quad \text{et} \quad \underbrace{\frac{\lambda\rho}{\beta-\rho}}_{\text{plus proche de la vérité (q. précédente)}} \quad \text{si} \quad \rho = \beta/2$$

0,05 s^{-1} 0,1 s^{-1} 0,09989

4) <u>Cas de fortes réactivités</u>

Cette fois-ci on néglige λ devant ω

$$\rho \sim \omega(\ell + \beta/\omega) \quad \text{soit} \quad \omega \sim \frac{\rho - \beta}{\ell} \qquad (1,5)$$

pour $\rho = 3\beta/2$ on trouve $\omega \sim 175\ s^{-1}$ au lieu de 175,4
cette fois-ci l'approximation est plus juste.

5) <u>Réactivité égale à β</u>

le calcul exact donne $\omega = \frac{1}{2}\left(-\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 + 4\beta\lambda/\ell}\right)$

soit $\omega_- = -5,966$ et $\omega_+ = 5,866\ s^{-1}$

la première approximation donnerait $\omega_+ \sim \lambda = 0,1\ s^{-1}$
la seconde conduit à $\omega_+ \sim 0$ ce qui est incohérent

En developpant la racine au premier ordre :

$$\omega = \frac{1}{2}\left[\underset{0,1}{-\lambda} \pm \underset{0,1}{\lambda}\left(1 + \frac{\overset{700\,10^{-5}}{4\beta}}{\underset{2\,10^{-5}}{\ell}\,\underset{0,1}{\lambda}}\right)^{1/2}\right] \sim \pm \frac{\lambda}{2}\left(2\sqrt{\frac{\beta}{\ell\lambda}}\right) \ (5,916)$$

ce qui reste valable

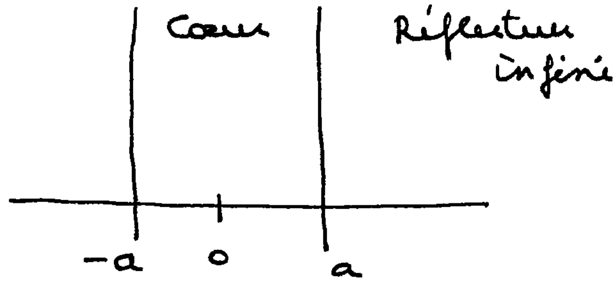
Aucune approximation sur l'équation de Nordheim n'est valable.
Eventuellement sur le résultat des deux racines (en justifiant l'approximation par des ordres de grandeur).

(1)

Exercice 2 : Pile "plaque" réfléchie à puissance uniforme

On utilisera l'équation de la diffusion à un groupe de neutrons

$$\Delta \phi + \frac{k_\infty - 1}{H^2}\phi = 0$$



Réacteur symétrique

$k_\infty = f(x)$

(H^2 constante
(même valeur coeur et réflecteur
D identique

Et $P(x) = K\, k_\infty(x)\, \phi(x)$

1°/ Calcul du flux neutronique $\phi(x)$ et $k_\infty(x)$

Réacteur critique, et puissance uniforme : $P(x) = A$ dans le coeur.

Il suffit d'écrire l'équation de la diffusion dans les 2 milieux.

Coeur : $$\Delta \phi + \underbrace{\frac{k_\infty \phi}{H^2}}_{} - \frac{\phi}{H^2} = 0$$

constante, puisque $K\, k_\infty(x)\, \phi(x) =$

Ce qui donne :

avec $A = \dfrac{P_0}{K}$: $$\Delta \phi(x) = \frac{\phi(x)}{H^2} - A = \frac{d^2\phi(x)}{dx}$$

Pour des raisons de symétrie, on utilisera les fonctions $\operatorname{ch} x$ et $\operatorname{sh} x$ d'où

$$\phi(x) = A + B\operatorname{ch}\left(\frac{x}{H}\right) \qquad A \text{ et } B \text{ constantes}$$

Réflecteur :

$$\Delta \phi = \frac{\phi}{H^2} \quad \text{soit} \quad \phi(x) = A'\exp\left(-\frac{x}{H}\right) \quad x \geqslant a$$

en éliminant les solutions d'exponentielle croissantes

Les flux solutions sont donc :

$$\phi_{cœur} = A + B\,ch\left(\frac{x}{M}\right)$$

$$\phi_{reflecteur} = C\exp\left(-\frac{x}{M}\right) \qquad (2,5)$$

Les condition aux limites donnent :

$$\begin{cases} A + B\,ch\,\frac{a}{M} = C\exp\left(-\frac{a}{M}\right) \\ -\cancel{D}\,\frac{B}{\cancel{M}}\,sh\,\frac{a}{M} = +\cancel{D}\,\frac{C}{\cancel{M}}\exp\left(-\frac{a}{M}\right) \end{cases}$$

La condition de criticité lie A et B. On élimine le terme de droite

$$A + B\left(ch\,\frac{a}{M} + sh\,\frac{a}{M}\right) = 0$$

d'où

$$\phi(x) = A\left[1 - \frac{ch(x/M)}{ch(a/M) + sh(a/M)}\right]$$ on multiplie par $K k_\infty$

Pour trouver la répartition du combustible, on recherche $k_\infty(x)$.

On sait que $K k_\infty(x) \cdot \phi(x) = \text{constante} = A \times K$ (1,5)

donc $k_\infty(x)$ est donné par : $k_\infty(x) = \dfrac{ch(a/M) + sh(a/M)}{ch(a/M) + sh(a/M) - ch(x/M)}$

2°/ <u>Application numérique</u>

a/M	$k_\infty(0)$	$k_\infty(a)$
0,5	2,541	3,164
1	1,582	2,313
2	1,157	2,037

(1)

On se rappellera les valeurs maximales de k_∞ pour UO_x 2,09...

3°/ Faisabilité d'une telle pile (1)

Outre la réalisation technologique, et son évolution en fonction de l'usure (apparition de Pu 239 favorisée au centre du fait d'un enrichissement plus faible), cela impose des valeurs élevées de k_∞ allant du simple au triple.

Pour de l'U_5, avec un k_∞ maximal de 2,09 (η max 100% U_5) on pourra difficilement descendre au centre à 2 à 3 fois moins.

Si on y arrive au centre, on ne pourra pas atteindre le triple sur les bords.

Exercice 3 : effet de vide

Etude de l'effet en réactivité de la réduction de 1% en densité du modérateur

1. Effet sur les facteurs p et f

On sait que $$\frac{dk_{eff}}{k_{eff}} = \frac{df}{f} + \frac{dp}{p} + \underbrace{\frac{d\varepsilon}{\varepsilon} + \frac{d\eta}{\eta}}_{\text{indépendants du modérateur}} + \frac{dP_{nf}}{P_{nf}}$$

Pour une cellule hétérogène, on aura

$$p = \exp\left(-\frac{V_c N_c I_{eff}}{V_m N_m (\xi\Sigma_s)_m}\right) \quad \text{et} \quad f = \frac{N_U V_u \sigma_a^u \Phi_u}{N_u V_u \sigma_a^u \Phi_u + N_m V_m \sigma_a^m \Phi_m}$$

La formule réduite est plus intéressante pour le calcul :

$$\frac{1}{f} - 1 = \frac{N_m V_m \sigma_{a,m} \Phi_m}{N_U V_u \sigma_{a,u} \Phi_u}$$

Comme N_m est proportionnel à la densité du modérateur, on aura :

$$p = \exp\left(-\frac{A}{\rho_m}\right) \quad A \text{ étant constant par rapport à } \rho_m$$

$$\frac{dp}{d\rho_m} = \frac{A}{\rho_m^2}\exp\left(-\frac{A}{\rho_m}\right) \quad \text{soit} \quad \frac{dp}{p} = \underbrace{\frac{A}{\rho}}_{\text{calculable à partir de } p}\underbrace{\left(\frac{d\rho}{\rho}\right)}_{-1\%} \qquad (1,5)$$

Pour le facteur d'utilisation thermique :

$$\frac{1}{f} - 1 = B\rho_m \qquad -\frac{df}{f^2}\cdot\frac{1}{d\rho} = B \quad \text{soit} \quad \frac{df}{f} = -Bf\,d\rho$$

$$\text{comme } B = \frac{1}{\rho}\left(\frac{1}{f}-1\right) = -\frac{f-1}{f\rho} \quad \text{on aura} \quad \frac{df}{f} = \underbrace{(f-1)}_{\text{connu}}\underbrace{\frac{d\rho}{\rho}}_{-1\%} \qquad (1,5)$$

Applications numériques :

Cas d'un REP sans bore (fin de cycle)

$$p = 0,8 \qquad f = 0,92$$

$\frac{A}{\rho} = -\ln p$ d'où $\frac{dp}{p} = \ln(0,8) \times 0,01 = -223 \; 10^{-5}$
(-223 pcm)

$f = 0,92$ d'où $\frac{df}{f} = (0,92-1)(-0,01) = 80 . 10^{-5}$
$= +80$ pcm

Au bilan une dilatation de température génère une contre réaction de $-223 + 80 = -143$ pcm.

Cas d'un REP en début de cycle (forte concentration en bore)

$f = 0,78$ d'où $\frac{df}{f} = (0,78-1)(-0,01) = +220$ pcm (1)

L'effet global est très faible (-3 pcm), on est limité en concentration de bore ; heureusement que l'effet sur les fuites reste négatif.

2°) Influence de l'effet Dancoff.

Dans quel sens l'effet Dancoff modifie-t-il le facteur p ?

Le facteur de Dancoff permet de comptabiliser les effets intercellules dus au réseau régulier du combustible.
La probabilité de collision avec le combustible et donc la dilution du modérateur permet d'augmenter la probabilité de traverser le modérateur sans collision : le libre parcours dans le modérateur croît.
Il faut étudier les différents termes du facteur p.

fait intervenir Σ_e donc b (Bell) et C (Dancoff)

$$p = \exp\left(- \frac{V_c N_c \, I_{eff}}{V_m N_m (\xi \sigma_s)_m} \right)$$

diminue de 1%

On se rappelle que plus l'absorbant résonant est important, l'autoprotection est plus efficace $I_{R\infty} > I_{R\,réel}$

Considérons le facteur de Dancoff donné par la figure 8.6 p 208 9

→ le rayon des barreaux diminue en unité de libre parcours moyen dans le modérateur... le facteur de Dancoff croît (logique) donc le f. de Bell ↘ puisque $b = \frac{(1-C)b^+}{1-C+Cb^+}$
donc σ_e décroît et I_{eff} aussi

que dire du rapport I_{eff}/N_m ? L'autoprotection l'emporte toujours donc le facteur p augmente. Dans le second cas on risque de passer par un effet positif en réactivité. (1)

3% Effet de la dilatation sur le facteur de désavantage, donc f

Si la dilatation du modérateur se produit, le modérateur génère moins de neutrons thermiques, il y aurait donc moins d'absorptions dans le modérateur.
Mais l'essentiel du creusement du flux est dû aux absorption dans le combustible (f 0,8 à 0,9). Cela aura donc peu d'effets sur le facteur f (1)

4% Cas du combustible MOX.

On admet que p n'est pas changé, mais $\Sigma_{a,u}$ est × 2,5.

Ceci nous donne donc :

$$\frac{1}{f} - 1 = \frac{\Sigma_{am}\,\Phi_m V_m}{\underbrace{\Sigma_{au}}_{\times 2,5}\,\Phi_u V_u}$$

Le coefficient B est divisé par 2,5

Les calculs donnent ainsi :

(1)

Calcul en fin de cycle :

$$\frac{1}{f} - 1 = \frac{1}{2,5}\left(\frac{1}{0,92} - 1\right) =$$

d'où $f = 0,967$
$0,01\,(1-f) = 34$ pcm
(au lieu de 80 pcm)

Calcul en début de cycle :

$$\frac{1}{f} - 1 = \frac{1}{2,5}\left(\frac{1}{0,78} - 1\right) =$$

d'où $f = 0,898$
$0,01\,(1-f) = 101$ pcm
(au lieu de 220 pcm) !

Le bore est nettement moins efficace puisque le combustible est beaucoup plus absorbant.