Devoir GA de Fevrier 2007

I. Calcul des P_{ij} dans un REP

Le réacteur contient 17×17 crayons
Avec une symétrie d'ordre 8, il faut donc $\sim \frac{17 \times 17}{8}$ cellules au minimum.
En fait la cellule centrale, et les cellules des bords du 1/8 doivent être aussi considérées. On arrive ainsi à 45 cellules (Reuss p 386)

On distinguera
5 volumes en couronne
1 volume pour la gaîne
2 volumes pour l'eau
soit 8 volumes par cellule

1. Géométrie à N volume et 1 groupe d'énergie

- Nombre de P_{ij} de type volume-volume

$$\underset{P_{1i}}{N} + (N-1) + (N-2) \ldots + 2 + \underset{P_{nn}}{1} = \frac{N(N+1)}{2}$$

- Nous avons un total de N^2 probabilités
avec $\frac{N(N-1)}{2}$ relation de réciprocité (1,5)
il nous faut $N^2 - \frac{N(N-1)}{\cancel{N}2} = \frac{N^2}{2} + \frac{N}{2} = \frac{N(N+1)}{2}$ calculs
Attention à se limiter aux probabilités volume-volume

2. Calcul multicellules de type Roth-4

(Reuss p 313)

Un neutron entrant par une face sort avec la même probabilité par une des trois autres faces. Bien que critiquable, particulièrement dans un assemblage grappé, cette hypothèse facilite les calculs.

On arrive ainsi à $\underbrace{45}_{\text{multicellules}} \times \underbrace{\frac{8 \times 9}{2}}_{\text{chaque cellule élémentaire}} = 1620$ probabilités V-V (1,5)

Voir également les exercices et devoir

3. Calcul exact

Pour un calcul exact, il faudrait considérer chaque élément dans un total de 45 cellules, soit

$$45 \times 8 = 360 \text{ volumes}$$ 1,5

d'où $\dfrac{360 \times 361}{2} = 64980$ calculs grâce aux relations de réciprocité

4. Calcul des probabilités de surface

Dans le second cas il faut envisager toutes les probabilités Surface Volume, Volume Surface et Surface Surface, pour chaque élément. 1,5

Il y a heureusement des relations de complémentarités qui limitent le nombre de calculs, et le lien avec les P_{VV}

Ce nombre est donc bien plus grand dans le second cas que le premier

$$P_{SV} = \frac{4V}{S} \Sigma P_{VS} \qquad 1 - P_{VV} = P_{VS}$$

donc il reste tous les P_{SS} à calculer, selon le nombre de cellules

Le second cas est plus "coûteux" que le premier.

5. Coût de calcul

On néglige le coût de calcul des P_{SS}

Dans le premier cas il y a 1620 calculs contre 10×64980

il y a donc un rapport de coût de

$$1620 / 649800 \ldots$$ 1

II Ralentissement dans l'hydrogène

Le ralentissement est effectué en milieu infini, par le seul hydrogène. On prendra $\Sigma_a = 0$, avec diffusion isotrope dans le centre de masse et une section efficace de diffusion indépendante de la léthargie u

$\Sigma_s = 1$ normalisée. La source est uniforme en espace, mais à $u = 0$

$S(u) = \delta(u)$

On rappelle que $\quad P(\omega)\,d\omega = e^{-\omega}\,d\omega \qquad \alpha = 1\ (H)$

ω gain en léthargie

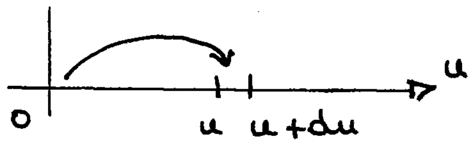
$\omega = u' - u \qquad u$ avant choc, u' après choc

comme on néglige la thermalisation $\quad u \in [0, +\infty[$

1. Calcul de $\varphi_1(u)$ et relation de récurrence

Soit $\varphi_n(u)$ le flux de neutrons ayant eu n diffusions

on pose $\varphi_0(u) = S(u) = \delta(u)$

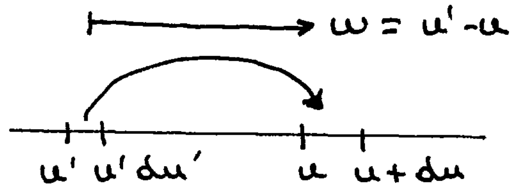


$$\varphi_1(u)\,du = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Source}}}{S(u)} \,.\, P(u)\,du$$

$\uparrow$ probabilité d'aller de 0 à u, à du près

$\varphi_1(u) = e^{-u}$ (dont 0,75)

Considérons maintenant $\varphi_{n-1}(u)$ connu et réparti selon u.



$$\varphi_n(u)\,du = \int_0^u \varphi_{n-1}(u')\,du' \,.\, e^{-(u-u')}\,du$$

Source $\downarrow$ en amont $(u' \leq u)$

$\downarrow$ probabilité d'arrivée en u

on pose $\omega = u - u'$ gain en léthargie $\quad u' = u - \omega$

donc $\varphi_n(u) = \int_u^0 - \varphi_{n-1}(u-w)\, e^{-w}\, dw$

car $du' = -dw$

soit $\varphi_n(u) = \int_0^u \varphi_{n-1}(u-w)\, e^{-w}\, dw$ (1,5)

2. Etude de $\varphi_2(u)$ et du maximum de $\varphi_n(u)$

2.a $\varphi_2(u) = \int_0^u \varphi_1(u-w)\, e^{-w}\, dw$

$$= \int_0^u e^{w-u}\, e^{-w}\, dw = e^{-u} \int_0^u dw = u\, e^{-u}$$ (1,5)

2.b Maximum de $\varphi_n(u)$

$\varphi_n(u)$ maximal quand $\dfrac{d\varphi_n(u)}{du} = 0$

$$\varphi_3(u) = \int_0^u \underbrace{(u-w)\, e^{-(u-w)}}_{\varphi_2(u')}\, e^{-w}\, dw$$

$$= e^{-u} \int_0^u (u-w)\, .dw = e^{-u} \left[u\,w - \frac{w^2}{2} \right]_0^u = e^{-u}\, \frac{u^2}{2}$$

on pose $\varphi_{n-1}(u) = \dfrac{u^{n-2}}{(n-2)!}\, e^{-u}$

on vérifie que $\varphi_n(u) = \dfrac{u^{n-1}}{(n-1)!}\, e^{-u}$

$$\varphi_n(u) = \int_0^u \frac{(u-w)^{n-2}}{(n-2)!}\, e^{-(u-w')}\, e^{-w'}\, dw' = e^{-u} \int_0^u \frac{(u-w)^{n-2}}{(n-2)!}\, dw'$$

$$\varphi_n(u) = \frac{e^{-u}}{(n-2)!} \left[- \frac{(u-w]^{n-1}}{(n-1)} \right]_0^u = \frac{e^{-u}}{(n-1)!}\, u^{n-1}$$

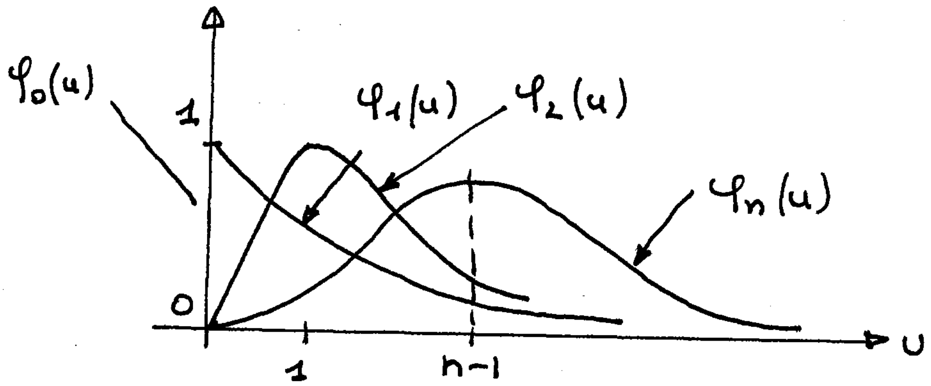
$$\varphi_n(u) = \frac{u^{n-1}}{(n-1)!}\, e^{-u}$$

Le maximum est donné par :

$$\frac{d\varphi_n(u)}{du} = -\frac{e^{-u}}{(n-1)!}\,u^{n-1} + \frac{(n-1)\,e^{-u}\,u^{n-2}}{(n-1)!}$$

$$= \frac{e^{u}\,u^{n-2}}{(n-1)!}\Big[n-1-u\Big]=0$$ donc le maximum est obtenu pour $u = n-1$

la distribution est la suivante (1)

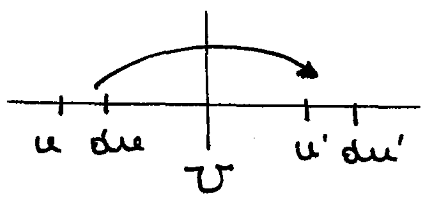


3. Probabilité de dépasser une léthargie U

Soit $q_n = \int_U^{\infty} \varphi_n(u)\,du$

Soit $\varphi_{n-1}(u)$ selon u et la léthargie U

Observons le courant qui passe en U



$$q(U) = \int_U^{\infty}\int_0^{U} \varphi_{n-1}(u)\,e^{-w}\,du\,du'$$

avec $w = u'-u$

neutrons en amont ayant eu n-1 chocs → transférés au delà de U par le N° choc.

dont 0,75

$$q_1 = \int_U^{\infty} \delta(u)\,e^{-u}\,du = e^{-U}$$

↓ 1 à l'origine (source)

$q_2 = \int_U^{\infty} u\,e^{-u}\,du$ il faut intégrer par partie d'où $$q_n = \int_{\upsilon}^{\infty} \frac{u^{n-1}}{(n-1)!} e^{-u}\, du$$

$$u'(x) = \frac{u^{n-1}}{(n-1)!} \qquad u(x) = \frac{u^n}{(n\ )!}$$

$$v(x) = e^{-u} \qquad v'(x) = -e^{-u}$$

Il y a un pb d'intégration par parties...

$$uv' = (uv)' - u'v$$

$$q_n = \left[+ \frac{u^n}{(n\ )!} e^{-u} \right]_{\upsilon}^{\infty} + \int_{\upsilon}^{\infty} \frac{u^{n-1}}{(n-1)!} e^{-u}\, du$$

$$q_n = \frac{\upsilon^n}{(n\ )!} e^{-\upsilon} + q_{n+1}$$

1,5

on remarquera que si $\upsilon \to \infty$ $q_n = q_{n-1}$
puisque l'exponentielle l'emporte sur toute puissance de x

4. Etude de l'écart $p_n = q_n - q_{n-1}$

Soit q_n probabilité d'être transféré au delà de υ au n° choc
q_{n-1} au n-1° choc

$p_n = q_n - q_{n-1}$
décrit la probabilité de passer au delà de υ entre le n-1° et le n° choc. C'est la n° collision qui le fait passer.

$$p_n = \frac{\upsilon^n}{n\ !} e^{-\upsilon}$$

1,5

à υ fixé p_n augmente si $n < \upsilon + 1$
p_n diminue si $n > \upsilon + 1$
puisque le maximum de p_n est donné par $\upsilon = n - 1$

5. Calcul de l'espérance mathématique

(7)

Soit la loi de probabilités : $\{ n ; p_n \}$

L'espérance de n vaut :

(dont 0,5)

$$\langle n \rangle = \frac{\Sigma\, n p_n}{\Sigma\, p_n} \quad \text{sur } n = 1 \text{ à } \infty$$

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} p_n = q_\infty - q_0 = 1$$ ils passent tous au delà de $\mathcal{U}$

on peut aussi écrire

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} p_n = e^{-u}\left[1 + \frac{u}{1!} + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} \ldots + \frac{u^n}{n!} + \ldots\right] = e^{-u} \times e^{u} = 1$$

$\langle n \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} n p_n$ est bien le nombre moyen de choc pour passer au delà de $\mathcal{U}$.

(1)

$$\langle n \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{\mathcal{U}^n e^{-U}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{U^n e^{-U}}{(n-1)!} = U e^{-U} \Big(\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{U^{n-1}}{(n-1)!}}_{e^{\mathcal{U}}} \Big) = \mathcal{U}$$

c'est à dire n fois le gain moyen en léthargie $\xi = 1$ (H).

6. question facultative

La variance est donnée par $v = \langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2$

$$\langle n^2 \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 p_n = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \frac{U^n e^{-U}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1+1}{(n-1)!} U^n e^{-U}$$

(dont 1)

$$= \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{U^n e^{-U}}{(n-2)!}}_{U^2 e^{-U} e^{U}} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{U^{n-1} e^{-U}}{(n-1)!}}_{U e^{-U} e^{U}} = U^2 + U$$

$$v = U^2 + U - U^2 = U$$

L'écart type sera donné par $\Delta = \sqrt{v} = \sqrt{U}$

(2)

III Incidence de l'effet Dancoff sur le facteur antitrappe

$$\sigma_e = \frac{(1-C)\,b^+}{1-C+Cb^+}\,\frac{1}{\ell N_0} + \frac{\Sigma'_c}{N_0}$$

b^+	facteur de Bell	1,1
C	facteur de Dancoff	0,3
ℓ	corde moyenne	0,8 cm
N_0	densité en U8	$2{,}2\ 10^{22}\ cm^{-3}$

On néglige les autres nucléides, donc $\Sigma'_c = 0$

1. Calcul de la section efficace équivalente de dilution

Sans effet Dancoff $\quad \sigma_e = 5{,}68$

$$b = \frac{0{,}7 \times 1{,}1}{0{,}7 + 0{,}33} = \frac{0{,}77}{1{,}03}$$

$$\sigma_e = \frac{1{,}1}{0{,}8 \times 22}\,10^{21} = 62{,}5\ 10^{-24}\,cm^2$$ (2,5)

Avec effet Dancoff, on trouve $\quad 42{,}47\ 10^{-24}\,cm^2$

2. Calcul du facteur antitrappe

Il nous faut $I_{eff} = 2{,}36 + 2{,}80\sqrt{\sigma_e}$

soit I_{eff} (sans Dancoff) = 24,496 b

I_{eff} (avec Dancoff) = 20,608 b

Partant de la formule $\quad p = \exp\left[-\dfrac{V_c N_0 I_{eff}}{\Sigma_i (V \xi \Sigma_s)_i}\right]$

et des rapports (2,5)

$$\frac{\ln p\,(\text{Dancoff})}{\ln p\,(\text{sans Dancoff})} = \frac{I_{eff}\,(\text{Dancoff})}{I_{eff}\,(\text{sans Dancoff})}$$

p avec Dancoff à 0,75

$$\ln(0{,}75) \times \frac{24{,}496}{20{,}608} \quad \text{d'où } p\,(\text{sans Dancoff}) = 0{,}710$$

soit une erreur $\dfrac{dp}{p} = \dfrac{\Delta\rho}{\rho} = -5283$ pcm ! ce qui est énorme.