

Examen de neutronique du 5 novembre 2007

I. Déformation de la distribution du flux

Soit un réacteur homogène initialement, presque infini (de $x = -(a+b)$ à $x = +(a+b)$)

On utilise la théorie à un groupe diffusif. Les distances d'extrapolation sont négligées.

A. Num : $a+b = 120 \text{ cm}$ $M^2 = 58,361 \text{ cm}^2$
aire de migration

1. Condition critique

Pour un réacteur homogène nu, la condition critique est explicitée par l'absence de courant net de neutrons ce qui se traduit par l'annulation du flux à la frontière extrapolée, soit encore $B_m^2 = B_g^2$

$$\textcircled{1} \quad B_m^2 = B_g^2 = \left(\frac{\pi}{2(a+b)} \right)^2$$

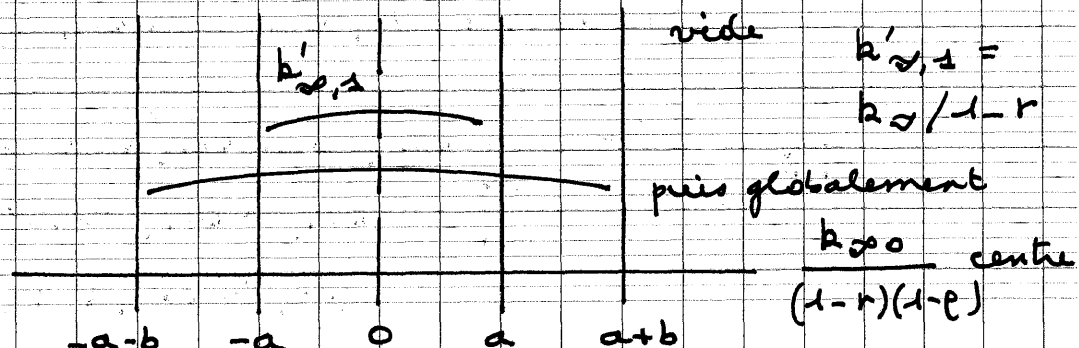
Pour la criticité $k_{eff} = 1 = k_{\infty} P_{nf} = \frac{k_{\infty}}{1 + M^2 B_g^2}$

0,25

$$\text{Soit } k_{\infty} = 1 + M^2 B_g^2 = 1 + \frac{\pi^2 \cdot 58,361}{4(120)^2} = 1,010$$

2. Insertion de réactivité en zone centrale

On a la disposition suivante :



On dispose donc d'un réacteur à 3 zones :

au centre $\frac{k_{20,0}}{(1-r)(1-p)}$ $r > 0 \quad p < 0$

sur les côtés $\frac{k_{20,0}}{(1-p)}$

L'ensemble est critique. Recherchons le flux.

Soit $B_{m,1}^2$ au centre $B_{m,1}^2 = \frac{k_{20,1}-1}{H^2}$

$B_{m,2}^2$ sur les côtés $B_{m,2}^2 = \frac{k_{20,2}-1}{H^2}$

Le flux s'exprime :

au centre : $\Phi_1(x) = A_1 \cos B_{m,1} x$ (Symétrique)

côtés : $\Phi_2(x) = A_2 \sin B_{m,2} (C-x)$ (frontière)

$\Phi_2(x) = A_2 \sin B_{m,2} (a+b-x)$

0,25 La condition de criticité s'exprime par l'égalité des flux et des courants, et ce système trivial qui en dérivé doit être résolu pour garantir les flux

flux : $A_1 \cos B_{m,1} a = A_2 \sin B_{m,2} b$

On prend les mêmes coefficients de diffusion ($D_1 = D_2$)

courants : $A_1 B_{m,1} \sin B_{m,1} a = A_2 B_{m,2} \cos B_{m,2} b$

Soit $\begin{cases} B_{m,1} \tan B_{m,1} a = B_{m,2} \cotan B_{m,2} b \\ B_{m,1} \text{ et } B_{m,2} \text{ fonctions de } r \text{ et } p \end{cases}$

$X_1 \tan X_1 a = X_2 \cotg X_2 b$

(1,5)

Pour le facteur de forme, il faut reprendre les intégrales

$$\Phi_1 = A \frac{\sin \chi_1 r}{r} \quad \Phi_2 = A \frac{\sin \chi_1 a}{\sin \chi_2 b} \frac{\sin \chi_2 (R-r)}{r}$$

La valeur moyenne du flux s'obtient en pondérant le flux en volume, c'est à dire

0,25

$$\bar{\Phi} = \frac{1}{V} \int_{\text{volume}} \Phi_i(r) \cdot 4\pi r^2 dr = \frac{1}{V} \int V_i$$

d'où

$$A_1 = \int_0^a A \cdot 4\pi r \sin \chi_1 r dr$$

↓ ↑ intégration par partie

$$u = r \quad u' = 1$$

$$v' = \sin \chi_1 r \quad v = -\frac{1}{\chi_1} \cos \chi_1 r$$

$$A_1 = 4\pi A \left(\left[-\frac{r}{\chi_1} \cos \chi_1 r \right]_0^a + \int_0^a \frac{1}{\chi_1} \cos \chi_1 r dr \right)$$

0,25

$$= 4\pi A \left(-\frac{a}{\chi_1} \cos \chi_1 a + \frac{1}{\chi_1^2} \sin \chi_1 a \right)$$

$$A_2 = \frac{4\pi A \sin \chi_1 a}{\sin \chi_2 b} \int_a^R \sin \chi_2 (R-r) r dr$$

↑ ↓

$$u = r \quad u' = 1$$

$$v = \frac{1}{\chi_2} \cos \chi_2 (R-r) \quad v' = \sin \chi_2 (R-r)$$

$$A_2 = k \left(\left[\frac{r \cos \chi_2 (R-r)}{\chi_2} \right]_a^R - \int_a^R \frac{1}{\chi_2} \cos \chi_2 (R-r) dr \right)$$

0,25

$$= k \left(+\frac{1}{\chi_2} R - \frac{a \cos \chi_2 b}{\chi_2} + \frac{1}{\chi_2^2} \sin \chi_2 b \right)$$

Soit en divisant par $\frac{4}{3}\pi R^3$, le volume total ; on trouve l'expression de l'inverse du facteur de forme (en divisant par $\Phi_{\max} = X_1 A$) :

$$\frac{R^3}{3F} = -\frac{a}{X_1^2} \cos X_1 a + \frac{1}{X_1^3} \sin X_1 a + \dots$$

$$\frac{\sin X_1 a}{\sin X_2 b} \left(\frac{1}{X_1 X_2} - \frac{R}{X_2 X_1} \cos X_2 b + \frac{1}{X_1 X_2} \sin X_2 b \right)$$

On pose $X_1 a = u$ et $X_2 b = v$

$$\frac{1}{F} = \frac{3a^3}{R^3 u^3} \sin u - \frac{a^3}{R^3 u^3} \cos X_1 a + \dots$$

$$\frac{\sin u}{\sin v} \left(\frac{ab}{R^2 uv} - \frac{1}{R^3 uv} \cos v + \frac{ab^2}{R^3 uv^2} \sin v \right)$$

$$\frac{1}{F} = \frac{3a^3}{R^3 u^3} (\sin u - \cos u) +$$

$$\frac{ab}{R^2} \frac{\sin u}{\cos u} \cdot \frac{1}{uv} \left(1 + \frac{b}{Rv} \sin v - \frac{a}{R} \cos v \right)$$

$$\frac{3a^3}{u^3 R^3} \left(\sin u - \cos u + \frac{b}{2a} \left(1 + \frac{b}{3a} u^2 \sin u \right) \right)$$

3. Cas où $\rho = -1000 \text{ kg/m}^3$

$$k_{v,0} = 1,01 \text{ d'où } k_{v,2} = \frac{1,01}{1+0,01} = 1$$

Le flux s'écrit alors selon l'équation de la diffusion

$$\Delta \Phi_2 = 0$$

0,5 puisque $B_{m,2} = 0$: soit $\frac{d^2 \Phi}{dx^2} = 0$ $\Phi = A_2 (a+b-x)$

dans ce cas le flux s'exprime comme :

$$\Phi_1 = A_1 \cos B_{m,1} x$$

$$\Phi_2 = A_2 (a+b-x)$$

et aux limites on aura en $x=a$

flux $A_1 \cos B_{m,1} a = A_2 b$
courant $A_1 B_{m,1} \sin B_{m,1} a = A_2$

soit la condition critique $B_{m,1} \tan B_{m,1} a = \frac{1}{b}$

(1,5)

$$(B_{m,1} a) \tan(B_{m,1} a) = \frac{a}{b} \quad \boxed{u \tan u = \frac{a}{b}}$$

4. Expression du flux et facteur de fane

Soit $F = \frac{\Phi_{\max}}{\Phi_{\text{moyen}}}$ En a : $\Phi(a) = A \cos B_{m,1} a$

0,25 $\Phi_1(x) = A \cos B_{m,1} x$ avec $\Phi_{\max} = A$
 $\Phi_2(x) = A \frac{\cos B_{m,1} a}{b} (a+b-x)$

$$\Phi_{\text{moyen}} = \frac{2 \int_0^a \Phi_1(x) dx + 2 \int_a^b \Phi_2(x) dx}{2(a+b)}$$

$$\int_a^0 A \cos B_m x \, dx = \frac{B_m}{A} \left[\sin B_m x \right]_a^0$$

$$= \frac{B_m}{A} \sin B_m a$$

$$\int_b^a A \cos B_m x \, dx = \frac{A}{b} \cos B_m x (a+b-x) \, dx =$$

$$= \frac{A \cos B_m x}{b} \left[(a+b)x - \frac{x^2}{2} \right]_b^a$$

$$= \frac{A \cos B_m a}{b} \left(b + \frac{a}{2} - \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} + \frac{a^2}{2} \right)$$

$$= - \frac{A \cos B_m a}{2b} (a+b)(a-b)b$$

$$= \frac{1}{2}(b+a)^2 + \frac{1}{2}a^2$$

En divisant par A , on trouve $1/F$

$$\frac{1}{F} = \frac{2 \sin B_m a}{b} + \frac{\cos B_m a}{a} (a+b)(b-a)$$

$$= \frac{2 \sin B_m a}{b} + \frac{\cos B_m a}{a} (b^2 - a^2)$$

$$\cos B_m a = \frac{a}{b} \cos B_m a$$

$$\frac{1}{F} = \frac{2a}{b} \cos B_m a$$

$$I_2 = 2 A \cos B_m a \left[(a+b)b - \frac{(a+b)^2}{2} + \frac{a^2}{2} \right]$$

$$ab + b^2 - \frac{b^2}{2} - \frac{2ab}{2} + \frac{a^2}{2} = \frac{a^2}{2}$$

$$\frac{1}{F} = \frac{2 \sin B_m a}{b} + \frac{2 \cos B_m a}{b} \frac{a^2}{2}$$

$$\frac{1}{F} = 2 \sin B_m a \cos B_m a + \cos B_m a \cdot b$$

5) Applications numériques

On prend $\rho = -1000 \text{ kg/m}^3$ $k_{\infty,2} = 1$ $a+b = 120 \text{ cm}$

La condition critique devient $\tan u = \frac{a}{b}$

$$\text{avec } \frac{a}{b} = \frac{\pi\sqrt{3}}{18} = \frac{\pi}{6} \times \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{on remplace } \frac{\pi}{6} \tan \frac{\pi}{6}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{\pi}{4} \quad \text{on remplace } \frac{\pi}{4} \tan \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{et } \frac{a}{b} = \frac{\pi\sqrt{3}}{3} \quad \text{on remplace } \frac{\pi}{3} \tan \frac{\pi}{3} = \frac{\pi\sqrt{3}}{3}$$

d'où les valeurs correspondantes de u et les facteurs de forme correspondants :

$$u \quad 0 \quad \pi/6 \quad \pi/4 \quad \pi/3 \quad \pi/2$$

$$a/b \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad \infty$$

$$a(\text{cm}) \quad 0$$

$$b(\text{cm}) \quad 120$$

$$F \quad 2$$

$$r \quad \infty$$

(2)

Le cas $u=0$, donc réactance infinie dans un domaine de largeur nulle est limite d'une situation de perturbation très locale type remous de queue.

6) question facultative : cas du réacteur sphérique

On reprend la résolution de l'équation de la diffusion en symétrie sphérique :

condition critique avec $a+b = 120 \text{ cm} \times 2 = R$

$$B_m^2 = \left(\frac{TC}{R} \right)^2 \quad h_\infty = 1 + K^2 B_m^2 = 1,01$$

Ecriture des flux en sphérique :

0,25 $\Phi_1 = \frac{A_1 \sin B_{m,1} r}{r} \quad 0 < r \leq a$

$$\Phi_2 = \frac{A_2 \sin B_{m,2} (R-r)}{r} \quad a \leq r \leq a+b = R$$

continuité des flux :

$$\frac{A_1 \sin B_{m,1} a}{a} = \frac{A_2 \sin B_{m,2} b}{a}$$

continuité des courants (D_i identiques)

$$A_1 \left(-\frac{B_{m,1} \cos B_{m,1} a}{a} + \frac{\sin B_{m,1} a}{a^2} \right) = A_2 \left(+\frac{B_{m,2} \cos B_{m,2} b}{a} + \frac{\sin B_{m,2} b}{a^2} \right)$$

deux termes peuvent se simplifier, et en faisant le quotient des coefficients de ce système trivial :

(-1)

$$X_1 \cotg X_1 a + X_2 \cotg X_2 b = 0$$

$$a \frac{\tan u}{u} + b \frac{\tan v}{v} = 0$$

Dans le cas

$$0,5 \quad \frac{\Phi_m}{A} = \frac{1}{a+b} \left[\int_0^a \cos \chi_1 x \, dx + \int_a^{a+b} \frac{\cos \chi_1 a}{b} (a+b-x) \, dx \right]$$

↑
raccrochement du flux
en $x=a$

$$\text{soit } \frac{\Phi_m}{A} = \frac{1}{a+b} \left[\left[\frac{1}{\chi_1} \sin \chi_1 x \right]_0^a + \dots \right. \\ \left. \dots + \left[\frac{\cos \chi_1 a}{b} \left((a+b)x - \frac{x^2}{2} \right) \right]_a^{a+b} \right]$$

$$\frac{\Phi_m}{A} = \frac{1}{a+b} \frac{\sin \chi_1 a}{\chi_1} + \frac{\cos \chi_1 a}{b(a+b)} \left[\frac{(a+b)^2}{2} - \frac{a^2}{2} - ab \right]$$

$b^2/2$

$$\text{soit } \frac{1}{F} = \frac{\Phi_{\max}}{\Phi_m} = \frac{a}{a+b} \frac{\sin \chi_1 a}{\chi_1 a} + \frac{b}{2(a+b)} \cos \chi_1 a$$

Pour le cas général nul le second terme doit être modifié avec

$$\frac{\Phi_m}{\Phi_{\max}} = \frac{1}{a+b} [A_0 + B_0]$$

$$B_0 = \int_a^{a+b} \underbrace{\frac{\cos \chi_1 a}{\sin \chi_2 b}}_{\text{raccrochement des flux en } x=a} \sin \chi_2 (a+b-x) \, dx$$

$$B_0 = \frac{\cos \chi_1 a}{\sin \chi_2 b} \left[\frac{1}{\chi_2} \cos (a+b-x) \right]_a^{a+b}$$

$$B_0 = \frac{\cos \chi_1 a}{\sin \chi_2 b} (1 - \cos \chi_2 b)$$

d'où l'expression générale de f

$$\frac{1}{F} = \frac{a}{a+b} \frac{\sin \chi_1 a}{\chi_1 a} + \frac{\cos \chi_1 a}{(a+b) \sin \chi_2 b} (1 - \cos \chi_2 b)$$

avec les notations propres :

$$\frac{1}{F} = \frac{a}{a+b} \frac{\sin u}{u} + \frac{b \cos u (1 - \cos v)}{(a+b) \sin v \cdot v}$$

$$\text{si } v \rightarrow 0 \quad \lim \frac{1 - \cos v}{\sin v} = \frac{2 \sin^2 v/2}{2 \sin v/2 \cos v/2} = \tan \frac{v}{2}$$

$$\text{d'où } \frac{\tan v/2}{v} \sim \frac{1}{2}$$

(2)

$$\text{et } \frac{1}{F} \sim \frac{a}{a+b} \frac{\sin u}{u} + \frac{b \cos u}{2(a+b)}$$

formule trouvée précédemment.

② Prise en compte des neutrons retardés

On considère deux groupes de neutrons retardés :

	β	$T(s)$	$\lambda (s^{-1})$
Neutrons de fission	679 pcm	7,84	0,0884
Photo-neutrons	33	1005	0,00069

1) Ecriture des équations de la cinétique

$$\frac{dn}{dt} = \frac{\rho - \beta_r - \beta_p}{\ell} n + \lambda_r c_r + \lambda_p c_p$$

$$\frac{dc_r}{dt} = \frac{\beta_r}{\ell} n - \lambda_r c_r \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 \text{ noté } \rho \text{ et } \ell^* \\ \ell \text{ noté } \ell^* \end{array} \right.$$

$$\frac{dc_p}{dt} = \frac{\beta_p}{\ell} n - \lambda_p c_p$$

①

2) Ecriture de l'équation de Nordheim

On pose $n = n_0 e^{\omega t}$ et $c_i = c_i^0 e^{\omega t}$

et on recherche l'équation caractéristique de ω
 les équations de la cinétique deviennent (à $e^{\omega t}$ près)

$$\ell n_0 \omega = (\rho - \beta_r - \beta_p) n_0 + (\lambda_r c_r^0 + \lambda_p c_p^0) \ell$$

$$\ell c_r^0 \omega = \beta_r n_0 - \ell \lambda_r c_r^0 \rightarrow c_r^0 = \frac{\beta_r}{\ell(\lambda_r + \omega)} n_0$$

$$\ell c_p^0 \omega = \beta_p n_0 - \ell \lambda_p c_p^0 \rightarrow c_p^0 = \frac{\beta_p}{\ell(\lambda_p + \omega)} n_0$$

En remplaçant et en simplifiant par n_0 :

①

$$\rho = \omega \left[\ell + \frac{\beta_r}{\lambda_r + \omega} + \frac{\beta_p}{\lambda_p + \omega} \right]$$

Avec les valeurs numériques indiquées l'équation devient :

$$\omega^2 + \omega \left(\underbrace{\frac{6,79 + 0,33}{\ell}}_{\text{terme principal}} \underbrace{\omega^3 + 8,84 \omega^2 + 6,9 \omega^4}_{\text{négligeable}} \right) + \dots$$

puisque ℓ très petit

$$\dots + \left(\underbrace{\frac{6,79 \omega^3 \times 8,84 \cdot \omega^2}{\ell} + \frac{6,9 \omega^4 \times 3,3 \cdot \omega^4}{\ell}}_{\text{terme principal}} + \underbrace{8,84 \times 3,3}_{\text{négligeable}} \omega^6 \right)$$

L'équation peut se ramener à :

$$\omega^2 + \omega \left(\underbrace{\frac{\beta_r + \beta_p}{\ell}}_{-S\omega} \right) + \underbrace{\frac{\beta_r \lambda_r + \beta_p \lambda_p}{\ell}}_P = 0$$

d'où deux racines de même signe, négatives.

Une est plus importante que l'autre, on peut donc ramener la solution approchée à :

$$\omega_1 \approx S = - \frac{\beta_r + \beta_p}{\ell} \sim - \frac{7,12 \cdot \omega^3}{\ell}$$

$$\omega_2 \sim - \frac{P}{S} = - \frac{\beta_r \lambda_r + \beta_p \lambda_p}{\beta_r + \beta_p}$$

soit

$$\omega_2 \sim - \frac{6,79 \times 8,84 \times \omega^5 + 6,9 \times 3,3 \omega^8}{7,12 \omega^3} = -0,0843 \text{ s}^{-1}$$

négligeable devant ω_1 (approximation valide)

(1,5)

5) Chute des absorbants et variation du flux

Dans le cas d'un arrêt du réacteur par chute des absorbants les neutrons "libres" sont très rapidement éliminés et le flux évolue uniquement vers les neutrons retardés.

Le réservoir de neutrons retardés (de finim) est important et dure depuis au bout de 3 à 5 périodes c'est à dire moins d'une minute.

Celui des neutrons issus des réacteurs (β, n) est moins important :

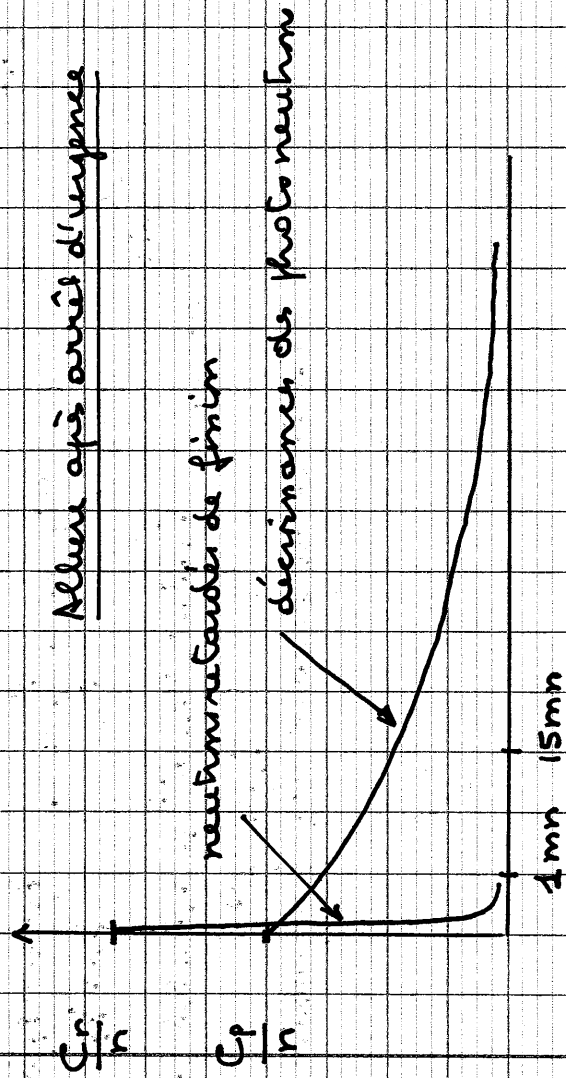
$$\frac{dC_p}{dt} = n - \lambda_p C_p$$

$$\frac{C_p}{n} = \frac{\beta_p}{\lambda_p} = \frac{3,3 \cdot 10^{-4}}{6,9} \approx$$

par contre il diminue bien plus lentement puisqu'il faut environ trois à cinq quant d'heure pour les éliminer.

(1)

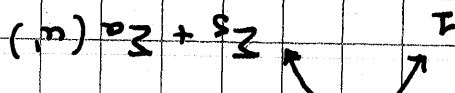
$$\frac{C_n}{n} = \frac{\beta_n}{\lambda_n} = \frac{6,79 \cdot 10^{-3}}{10^{-4} \times 8,84 \cdot 10^{-2}}$$



③ Echelle de résonance

On considère $Z_s = cte(u)$, modèle H (donc $\beta = 1$) avec n résonances par unité de fréquence, de largeur γ et Z_a constante sur ce domaine.

1) Calcul de la probabilité $p(u)$ par unité de u .

$$p(u) = \exp\left(-\int_{u-1}^u \frac{Z_a(u')}{Z_s + Z_a(u')} du'\right)$$


En dehors des résonances : $Z_a(u') = 0$
 Dans les résonances : $Z_a(u') = Z_a$

donc pour chaque résonance $du' = \gamma$
 et l'expression devient

$$\frac{Z_a}{Z_s + Z_a} \gamma$$

d'où $p(u) = \exp\left(-\frac{n \gamma Z_a}{Z_s + Z_a}\right)$ entre 2 échelons
 espacés d'une unité

2) Calcul de $Z_{a,eff}$

La que c'est mesuré, c'est le même effet, n't :
 $p(u) = \exp\left(-\frac{Z_{a,eff}}{Z_s + Z_{a,eff}}\right) = \exp\left(-\frac{n \gamma Z_a}{Z_s + Z_a}\right)$
 d'où par identification :

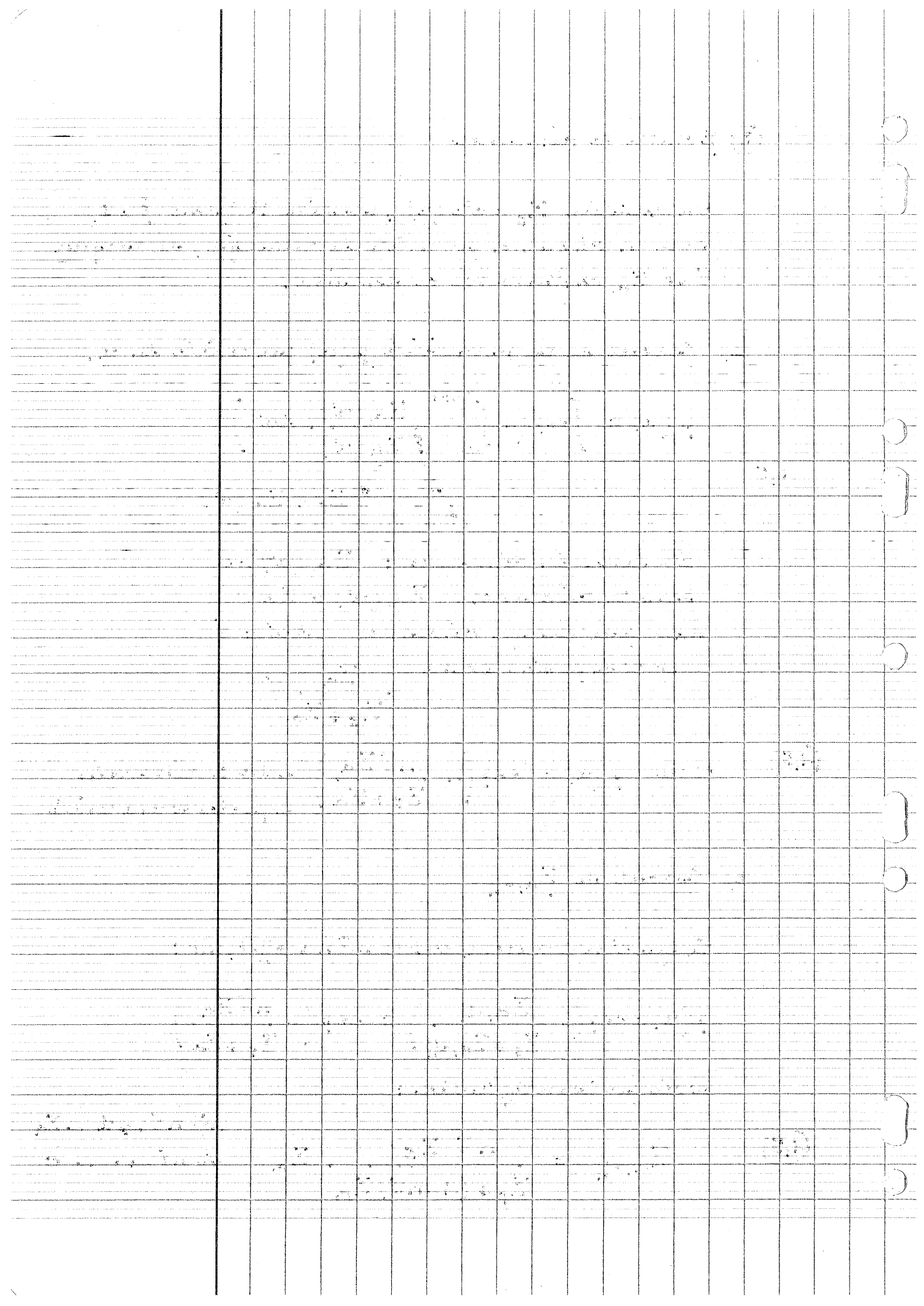
$$Z_{a,eff} = \frac{n \gamma Z_s}{Z_s + (1 - n \gamma) Z_a}$$

$n \gamma \rightarrow 1 \rightarrow Z_a$
 $n \gamma \rightarrow 0 \rightarrow 0$

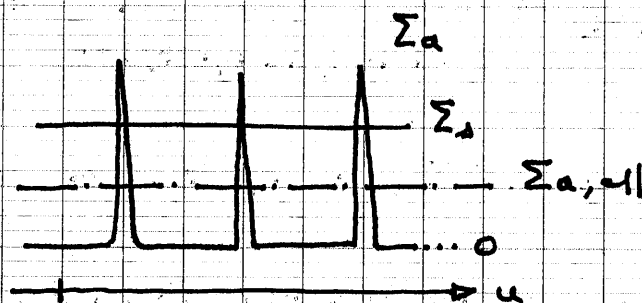
(1,5)

(1,5)

0,5



3) Autoprotection des résonances



pour $n\gamma$ intermédiaire
on aura
 $\Sigma_{a,eff} < \Sigma_a$

Soit $\bar{\Sigma}_a$ la moyenne de Σ_a sur l'intervalle d'une unité de l'énergie

0,5

$$\bar{\Sigma}_a = \frac{n\gamma \Sigma_a}{1} = n\gamma \Sigma_a$$

On retrouve ainsi

(1,5)

$$\frac{\Sigma_{a,eff}}{\bar{\Sigma}_a} = \frac{n\gamma \Sigma_s}{\Sigma_s + (1-n\gamma)\Sigma_a} \times \frac{\Sigma_a}{n\gamma \Sigma_a} = \frac{\Sigma_s}{\Sigma_s + (1-n\gamma)\Sigma_a}$$

ce qui peut être assimilé à un facteur d'autoprotection
1 puisque $\Sigma_{a,eff}$ est d'autant plus faible que Σ_a est important (à $n\gamma$ constant)

Plus les résonances sont importantes, moins elles sont ressenties (relativement bien sûr)

4) Application numérique

$$n = 810 \quad \gamma = 0,004 \quad n\gamma = 4 \cdot 10^{-2} \quad \Sigma_a / \Sigma_s = 100$$

$$\text{On prendra } \Sigma_a = 100$$

$\Sigma_{a,eff}$ est obtenu à partir de $p(u)$ équivalent.

0,5

$$p(u) = \exp\left(-\frac{4 \cdot 10^{-2}}{1,01}\right) = 0,9612 \text{ par unité de } u$$

$$p(7u) = (0,9612)^7 = 0,757$$

ce qui conduit à :

$$0,5 \quad \Sigma a_{ij} = \frac{0,04 \times 100}{1 + (1 - 0,04)100} = 0,04124$$

$$0,5 \quad \bar{\Sigma a} = n \Sigma a = 0,04 \times 100 = 4$$

(1,5)

d'où un facteur d'autoprotection de 0,0103
l'effet des absorptions est très atténué.

Si l'on en tenait pas compte, le taux de réaction
d'absorption serait 100 fois trop élevé et le
k_{eff} largement surestimé.