

Génie Atomique

EXAMEN ÉCRIT DE NEUTRONIQUE

2 novembre 2009

Remarques :

- Durée de l'examen : 3 heures.
- Les documents de cours sont autorisés.
- Les notations non définies sont celles du "Précis de neutronique".
- Barème de notation
(sur un total de 20 points, plus 4 points pour la question facultative) :

Question	I	II-1	II-2	II-3	II-4	III	IV	V-1	V-2
Points	3	2	2	1,5	1,5	5	4	1	4

- Les parties I et II sont indépendantes. La partie théorique de IV est indépendante de III. La partie V est indépendante de IV.

Étude de configurations homogènes

L'ensemble du problème sera traité par la théorie à deux groupes pour des configurations homogènes, sphériques, non réfléchies. Les distances d'extrapolations seront négligées.

Le milieu constituant ces configurations sera assimilé à un mélange homogène d'une matière fissile, à raison de N molécules par unité de volume, avec un modérateur indicé m .

Notations proposées :

- L_1^2 et L_2^2 : aires de migration dans chacun des groupes.
- $L_{1,m}^2$ et $L_{2,m}^2$: aires de migration dans chacun des groupes pour le modérateur pur.
- D_1 et D_2 : coefficients de diffusion.
- $\Sigma_{a,m}$: section efficace macroscopique d'absorption du modérateur dans le groupe 2 (l'absorption du modérateur dans le groupe 1 est supposée négligeable).
- σ_a et $\nu\sigma_f$: sections efficaces d'absorption et de production de la matière fissile pour le groupe 2 (sections efficaces par molécule) ; $\eta = \nu\sigma_f/\sigma_a$: facteur de reproduction de cette matière.

On supposera que D_1 , D_2 , $L_{1,m}^2$ et $\Sigma_{a,m}$ sont indépendants de N .

On supposera aussi que $L_1^2 = L_{1,m}^2$ et on calculera l'aire de migration du groupe 2 par la relation $L_2^2 = D_2/\Sigma_a = L_{2,m}^2/(1 + X)$ avec $X = N\sigma_a/\Sigma_{a,m}$.

On négligera les fissions induites par neutrons du groupe 1.

Dans un premier temps, on négligera aussi les absorptions par la matière fissile pour les neutrons du groupe 1.

I - Étude de diverses matières fissiles

La matière fissile envisagée est de l'uranium soit naturel (0,7 % d'isotope 235 et 99,3 % d'isotope 238), soit enrichi (20 % d'isotope 235 et 80 % d'isotope 238), les pourcentages indiqués étant calculés sur les nombres de noyaux. Comme cet uranium est destiné à être mis en solution dans un milieu aqueux, on envisage soit un nitrate $\text{UO}_2(\text{NO}_3)_2$, soit un sulfate UO_2SO_4 . En utilisant les données rappelées ci-dessous, calculer pour les quatre combinaisons les caractéristiques $\bar{\nu}\bar{\sigma}_f$ et $\bar{\sigma}_a$ (par molécule) et leur rapport η , pour des neutrons thermiques. Montrer qu'il est inutile de retenir le nitrate d'uranium naturel si l'on envisage de réaliser une configuration critique.

Données nucléaires (en barns, pour les neutrons thermiques) :

- Uranium 235 : $\nu\sigma_f = 1\,415$; $\sigma_a = 680$.
- Uranium 238 : $\sigma_a = 2,7$.
- Azote : $\sigma_a = 2$.
- Soufre : $\sigma_a = 0,5$.
- Oxygène : $\sigma_a \simeq 0$.

II - Étude théorique de la condition critique

1 - Dans le cadre des approximations proposées, expliciter le facteur de multiplication infini, k_∞ , du mélange. On pourra l'exprimer en utilisant les deux paramètres η et X .

2 - En déduire l'expression du facteur de multiplication effectif du système. Outre les deux paramètres η et X , on l'exprimera avec les aires de migration du modérateur, $L_{1,m}^2$ et $L_{2,m}^2$, et avec le rayon R du système intervenant dans la probabilité antifuite.

3 - Montrer qu'il est impossible d'obtenir une situation critique si le rayon R est inférieur ou égal à la valeur R_0 telle que :

$$L_{1,m}^2 \frac{\pi^2}{R_0^2} = \eta - 1.$$

Pour la suite du problème on adoptera $R = \sqrt{2}R_0$, c'est-à-dire :

$$L_{1,m}^2 \frac{\pi^2}{R^2} = \frac{\eta - 1}{2}.$$

4 - Calculer dans ces conditions la valeur de X assurant la criticité. Comparer à la valeur X_0 de X donnant $k_\infty = 1$.

III - Applications numériques

Deux modérateurs sont envisagés : l'eau ordinaire et l'eau lourde. Leurs caractéristiques sont données dans le tableau suivant.

Modérateur	Eau ordinaire	Eau lourde
$L_{1,m}^2$ (cm ²)	27	130
$L_{2,m}^2$ (cm ²)	8	10 000
$\Sigma_{a,m}$ (cm ⁻¹)	0,0215	0,000044

Calculer, pour le sulfate d'uranium naturel et le sulfate d'uranium enrichi et chacun de ces deux modérateurs :

- le rayon R_0 ,
- le rayon R ,
- le volume du système,
- la concentration critique X ,
- la concentration critique en moles d'uranium par litre de solution.
- la concentration critique en grammes d'uranium par litre de solution,
- les concentrations donnant $k_\infty = 1$.

Commenter les résultats, en particulier sous l'angle de la possibilité concrète de la réalisation de la condition critique.

IV - Prise en compte de la capture résonnante

Jusqu'ici, toutes les absorptions dans le groupe 1 ont été négligées. On se propose maintenant de prendre en compte les captures résonnantes par l'uranium 238. Pour cela on utilisera la formule classique du facteur p en géométrie homogène et on multipliera par ce facteur les valeurs de k_∞ précédemment considérées. Donner les valeurs du facteur de multiplication effectif des quatre configurations considérées au paragraphe III et commenter les résultats. Montrer que la combinaison uranium naturel - eau ordinaire ne permettra pas de réaliser une situation critique.

Données pour les applications numériques :

- Intégrale effective de capture résonnante par l'uranium 238 :

$$I_{\text{eff}} = 3,1 + 2,4 \sqrt{\sigma_d},$$

où σ_d est la section efficace de dilution.

- Propriétés des modérateurs (barns, par molécule ; cf. *Précis de neutronique*, page 178) :

Modérateur	Eau ordinaire	Eau lourde
$\sigma_{s,m}$ (groupe 1)	44,7	10,7
$(\xi\sigma_s)_m$ (groupe 1)	41,3	5,41
$\sigma_{a,m}$ (groupe 2)	0,664	0,00121

V - Masse critique minimale

Pour cette question, on s'intéresse uniquement aux cas à uranium enrichi et, pour simplifier, on suppose que $p = 1$.

1 - Montrer que X est une fonction décroissante de R entre le rayon minimum R_0 et l'infini. En déduire (sans calculs) que la masse critique d'uranium passe par un minimum pour un rayon R_1 compris entre ces limites.

2 - (*question facultative*). Expliciter l'équation donnant R_1 . Déterminer R_1 et m_1 pour chacun des deux modérateurs.



SOLUTION

I - Étude de diverses matières fissiles

Le tableau suivant résume les résultats

Uranium	Sel	$\bar{\nu}\bar{\sigma}_f$	$\bar{\sigma}_a$	η
Naturel	Nitrate	9,905	11,441	0,8657
Naturel	Sulfate	9,905	7,941	1,2473
Enrichi	Nitrate	283	142,16	1,9907
Enrichi	Sulfate	283	138,66	2,0410

La capture relativement importante de l'azote (presque aussi importante que celle de l'uranium 238), qui en outre concerne deux atomes dans la molécule, conduit à un facteur η sensiblement inférieur à 1 pour le nitrate d'uranium naturel. Cette combinaison peut donc être éliminée. Le sulfate d'uranium naturel, en revanche, paraît un choix possible. Avec un uranium enrichi à 20 %, le facteur η est proche dans les deux cas de celui de l'uranium 235 pur : 2,08.

II - Étude théorique de la condition critique

1 - Les facteurs ε et p sont supposés tous les deux égaux à 1 ; donc :

$$k_\infty = f\eta = \frac{N\nu\sigma_f}{N\sigma_a + \Sigma_{a,m}} = \frac{\eta X}{X + 1}.$$

2 - La situation est une situation fondamentale. En théorie à deux groupes, on a :

$$k_{\text{eff}} = \frac{k_\infty}{(1 + L_1^2 B^2)(1 + L_2^2 B^2)}.$$

Ici :

$$B^2 = \frac{\pi^2}{R^2}$$

et l'énoncé suggère d'écrire :

$$L_1^2 = L_{1,m}^2 \quad \text{et} \quad L_2^2 = \frac{L_{2,m}^2}{X+1}.$$

D'où :

$$k_{\text{eff}} = \frac{\frac{\eta X}{X+1}}{(1 + L_{1,m}^2 \frac{\pi^2}{R^2})(1 + L_{2,m}^2 \frac{\pi^2}{R^2} \frac{1}{X+1})}.$$

$$k_{\text{eff}} = \frac{\eta X}{(1 + L_{1,m}^2 \frac{\pi^2}{R^2})(X + 1 + L_{2,m}^2 \frac{\pi^2}{R^2})}.$$

3 - La valeur critique de X est obtenue en écrivant $k_{\text{eff}} = 1$:

$$\eta X = (1 + L_{1,m}^2 \frac{\pi^2}{R^2})(X + 1 + L_{2,m}^2 \frac{\pi^2}{R^2});$$

$$X = \frac{(1 + L_{1,m}^2 \frac{\pi^2}{R^2})(1 + L_{2,m}^2 \frac{\pi^2}{R^2})}{\eta - 1 - L_{1,m}^2 \frac{\pi^2}{R^2}}.$$

Cette valeur est positive si :

$$\eta - 1 - L_{1,m}^2 \frac{\pi^2}{R^2}$$

est positif, c'est-à-dire si le rayon du réacteur est plus grand que le rayon R_0 défini dans l'énoncé. (Si R est inférieur à R_0 , l'excédent de η sur l'unité ne compense pas les fuites du groupe 1.)

4 - Pour la valeur de R définie dans l'énoncé, on aura :

$$X = \frac{\eta + 1}{\eta - 1} + \frac{\eta + 1}{2} \frac{L_{2,m}^2}{L_{1,m}^2}.$$

La valeur donnant $k_{\infty} = 1$ est :

$$X_0 = \frac{1}{\eta - 1}.$$

III - Applications numériques

Le tableau suivant rassemble les résultats.

Modérateur Combustible	Eau ordinaire		Eau lourde	
	U. naturel	U. enrichi	U. naturel	U. enrichi
$L_{1,m}^2$ (cm ²)	27		130	
$L_{2,m}^2$ (cm ²)	8		10 000	
$\Sigma_{a,m}$ (cm ⁻¹)	0,0215		0,000044	
η	1,2473	2,0410	1,2473	2,0410
σ_a (barns)	7,941	138,66	7,941	138,66
R_0 (cm)	32,83	16,00	72,03	35,11
R (cm)	46,42	22,63	101,86	49,65
Volume (litres)	419,1	48,52	4 428	512,7
X (sans dimension)	9,420	3,372	95,52	119,88
N (10 ²⁴ /cm ³)	$2,551 \cdot 10^{-2}$	$5,228 \cdot 10^{-4}$	$5,293 \cdot 10^{-4}$	$3,804 \cdot 10^{-5}$
C (moles/litre)	42,35	0,8682	0,8789	0,06317
C (grammes/litre)	10 080	206,6	209,2	15,03
X_0 (sans dimension)	4,044	0,9606	4,044	0,9606
N_0 (10 ²⁴ /cm ³)	$1,095 \cdot 10^{-2}$	$1,489 \cdot 10^{-4}$	$2,241 \cdot 10^{-5}$	$3,048 \cdot 10^{-7}$
C_0 (moles/litre)	18,18	0,2473	0,0372	0,0005062
C_0 (grammes/litre)	4 327	58,86	8,855	0,1205

Le formulaire est le suivant :

$$R_0 = \frac{\pi L_{1,m}}{\sqrt{\eta - 1}} ; \quad R = \sqrt{2} R_0,$$

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3,$$

$$X_0 = \frac{1}{\eta - 1} ; \quad X = \frac{\eta + 1}{\eta - 1} + \frac{\eta + 1}{2} \frac{L_{2,m}^2}{L_{1,m}^2},$$

$$N_0 = \frac{\Sigma_{a,m} X_0}{\sigma_a} ; \quad N = \frac{\Sigma_{a,m} X}{\sigma_a}.$$

On passe ensuite aux concentrations C en moles par litre en divisant par $6,022 \cdot 10^{23}$ (nombre d'Avogadro) et en multipliant par 1 000 (nombre de cm³ dans un litre) ; puis aux grammes par litre en multipliant par 238 (nombre de grammes d'uranium par mole).

On peut faire deux remarques : la première est qu'il paraît impossible de constituer une configuration critique en utilisant l'eau et l'uranium naturel ; la concentration de sulfate d'uranium qui serait nécessaire est certainement impossible à atteindre (et en outre, on peut mettre en doute la modélisation pour une telle concentration). La seconde remarque est qu'une configuration à eau lourde est inévitablement assez volumineuse, même en

utilisant de l'uranium enrichi, car il ne faut pas avoir un taux de fuites épithermiques excessif.

IV - Prise en compte de la capture résonnante

Les formules permettant de calculer le facteur antitrappe p sont les suivantes :

$N_8 = e_8 N$ avec $e_8 = 0,993$ (uranium naturel) ou $e_8 = 0,8$ (uranium enrichi) ;

$$\sigma_d = \frac{\Sigma_{s,m}}{N_8} = \frac{1}{X} \frac{\sigma_{s,m}}{\sigma_{a,m}} \frac{\sigma_a}{e_8} ;$$

$$I_{\text{eff}} = 3,1 + 2,4 \sqrt{\sigma_d} ;$$

$$p = \exp\left(-\frac{N_8 I_{\text{eff}}}{(\xi \Sigma_{s,m})}\right).$$

Pour effectuer les calculs numériques à partir des données fournies, on peut écrire, pour le calcul de la section de dilution :

$$\sigma_d = \frac{\Sigma_{s,m}}{N_8} = \frac{\sigma_a \sigma_{s,m}}{e \sigma_{a,m} X}$$

et pour celui du facteur p :

$$p = \exp\left(-\frac{N_8 I_{\text{eff}}}{(\xi \Sigma_{s,m})}\right) = \exp\left(-\frac{e I_{\text{eff}} \sigma_{a,m} X}{\sigma_a (\xi \sigma_s)_m}\right).$$

Le tableau suivant donne les résultats numériques (les sections efficaces sont en barns).

Modérateur Combustible	Eau ordinaire		Eau lourde	
	U. naturel	U. enrichi	U. naturel	U. enrichi
e	0,993	0,8	0,993	0,8
σ_a	7,941	138,66	7,941	138,66
$\sigma_{a,m}$	0,664		0,00121	
$\sigma_{s,m}$	44,7		10,7	
$(\xi \sigma_s)_m$	41,3		5,41	
X	9,420	3,372	95,52	119,88
σ_d	57,15	3 460	740,3	12 785
I_{eff}	21,24	144,3	68,40	274,5
p	0,6688	0,9559	0,8330	0,9584

On peut faire les remarques suivantes : la combinaison eau ordinaire -

uranium naturel ne permet certainement pas de réaliser la condition critique : non seulement, la concentration de sulfate qu'il faudrait n'est certainement pas possible (question III) mais, en outre, si l'on tient compte des captures résonnantes, on voit que le produit ηp devient sensiblement inférieur à l'unité (0,84 pour le cas considéré), ce qui ne laisse aucun espoir ! La combinaison uranium naturel - eau lourde semble tout juste possible compte tenu de la faible capture par l'eau lourde mais la marge est faible ($\eta p = 1,04$ pour le cas considéré ; il faudrait certainement reprendre tous les calculs en tenant compte du facteur p). En revanche, l'utilisation d'uranium enrichi permet facilement d'atteindre la condition critique même avec l'eau ordinaire. Comme la concentration d'uranium à viser est faible, le facteur p est proche de l'unité et les concentrations critiques sont sans doute voisines de celles qui ont été calculées à la question III. Noter que les sections efficaces de dilution sont importantes (surtout pour l'eau lourde) : l'approximation linéaire en $\sqrt{\sigma_d}$ de l'intégrale effective n'est sans doute plus valable : elle surestime I_{eff} et donc les valeurs de p sont certainement encore plus proches de 1 que celles qui ont été obtenues (pour l'eau lourde, la formule donne une intégrale effective de 275 barns, proche de l'intégrale à dilution infinie qui est de l'ordre de 280 barns).

V - Masse critique minimale

1 - Reprenons l'expression de X trouvée en II-3 :

$$X = \frac{(1 + L_{1,m}^2 B^2)(1 + L_{2,m}^2 B^2)}{\eta - 1 - L_{1,m}^2 B^2}$$

avec :

$$B^2 = \frac{\pi^2}{R^2}.$$

Cette expression est visiblement une fonction croissante de B^2 , puisque c'est la cas des trois facteurs qui la compose (tant que le dénominateur reste positif) ; donc X décroît avec R .

2 - (*question facultative*). La masse d'uranium est proportionnelle au produit XV où V est le volume ; ce dernier est proportionnel à R^3 , donc à $B^{-3/2}$. En posant :

$$x = L_{1,m}^2 B^2 \quad ; \quad \zeta = \eta - 1 \quad \text{et} \quad \alpha = \frac{L_{2,m}^2}{L_{1,m}^2},$$

on est donc amené à rechercher le minimum de la fonction :

$$f(x) = \frac{(1+x)(1+\alpha x)}{x^{3/2}(\zeta-x)}.$$

L'annulation de la dérivée conduit à l'équation :

$$\alpha x^3 + 3(1+\alpha)x^2 + \alpha\zeta x^2 - \zeta(1+\alpha)x + 5x - 3\zeta = 0.$$

Cette équation du troisième degré doit être résolue numériquement. Le tableau suivant rassemble les résultats.

Modérateur	Eau ordinaire	Eau lourde
x	0,525806	0,263326
$u = x/L_{1,m}^2$ (cm ⁻²)	0,0194743	0,00202558
$R = \pi/\sqrt{u}$ (cm)	22,5123	69,8031
$V = (4/3)\pi R^3$ (cm ³)	47 790,9	1 424 665
$X = (1+x)(1+\alpha x)/(\zeta-x)$	3,42302	34,5300
$N = \Sigma_{a,m}X/\sigma_a$ (cm ⁻³)	5,30758.10 ²⁰	1,095715.10 ¹⁹
Moles par litre	0,881365	0,0181952
Grammes par litre	209,764	4,33046
Masse d'uranium (kg)	10,025	6,169

On peut faire les remarques suivantes : par hasard, le rayon choisi à la question 2 correspond juste à la masse critique minimale pour l'eau ordinaire, soit 10,0 kg ; pour l'eau lourde, la valeur minimale est de 6,2 kg, un peu plus faible que celle de la question 2, 7,7 kg. Bien que l'eau lourde capture peu par rapport à l'eau ordinaire, la masse critique minimale n'est pas beaucoup plus faible que celle relative à l'eau ordinaire : il faut d'une part un rayon assez grand pour réduire la fuites du groupe 1 et une concentration X assez forte pour réduire l'aire de diffusion et donc les fuites du groupe 2.

