Exercices sur la cinétique des neutrons

1. Calcul simplifié en tenant compte des neutrons retardés

En reprenant la formule trouvée en l'absence des neutrons retardés et en recalculant le temps de génération par pondération avec ces neutrons retardés, comparer pour un échelon de réactivité de 100 pcm, et au bout de 10 secondes :

- *l'évolution de population sans tenir compte des neutrons retardés,*
- *en tenant compte des neutrons retardés, par pondération de l*,*
- *avec le calcul exact du cours (sans oublier le saut-prompt)*

Refaire le calcul pour 250 pcm. Conclure.
Application numérique
e : β = 650 pcm ; λ = 0,1 s^{-1} ; l (sans retardés) = 10^{-4}s*

Reprenons l'équation du bilan des neutrons **sans tenir compte des neutrons retardés**. La variation de la densité de neutrons pendant l'intervalle de temps dt est égale à la différence des productions et des disparitions

$$dn(t) = n(t+l) - n(t) = k_{eff}.n(t) - n(t) = (k_{eff} - 1)\ n(t)$$

$$\frac{dn(t)}{dt} = \frac{k_{eff}.n(t) - n(t)}{l} \qquad \frac{dn(t)}{dt} = \frac{\rho}{l^*} n(t)$$

Il s'ensuit, après la résolution classique d'une équation différentielle du premier ordre, que la densité neutronique s'exprime comme :

$$n(t) = n_0 \cdot e^{\left(\frac{\rho}{l^*}\right).t} = n_0 . e^{\left(\frac{t}{T}\right)}$$

Tout dépend donc de la réactivité et du temps de génération

- Evolution croissante si la réactivité (écart à la criticité) est positive
- Evolution décroissante si la réactivité est négative

Si l'on tient compte des neutrons retardés on modifiera le temps de génération en tenant compte du "retard" des neutrons issus des précurseurs, soit 10 secondes avant de participer à l'activité des neutrons dans les matériaux.

Le calcul est identique, seules les données changent.

Si maintenant, pour rechercher une solution exacte, on applique les formules développées par la résolution des équations de la cinétique :

$$\frac{dn(t)}{dt} = \frac{\rho - \beta}{l*} .n(t) + \lambda.C(t)$$

$$\frac{dC(t)}{dt} = \frac{\beta}{l*} .n(t) - \lambda.C(t)$$

On arrive ainsi à la solution exacte :

$$\boxed{n(t) = \frac{n_0}{\beta - \rho}\left[-\rho.exp\left(-\frac{\beta-\rho}{l*}.t\right) + \beta.exp\left(\frac{\lambda.\rho}{\beta-\rho}.t\right)\right]}$$

Il suffit donc de comparer les différents résultats pour mieux comprendre les erreurs éventuelles (approximations) et leur domaine de validité.

comparaison des modèles de croissance

temps de génération (s)	0,0001	corrigé du retard	0,0651	(s)
fraction de neutrons retardés	0,0065	constante de temps des précurseurs (12 s)		
densité de neutron initiale	1		0,0833	(s-1)

réactivité (en pcm)		**temps** (secondes)	**sans n retardés**	**avec n retardés**	**solution exacte**
	100	**0,1**	**2,72**	**1,00**	**1,18**
		1	**22026,47**	**1,02**	**1,20**
		10	*2,69E+43*	**1,17**	**1,38**
		30	*1,94E+130*	**1,59**	**1,86**
		60	*3,77E+260*	**2,51**	**2,93**
	250	**0,1**	**12,18**	**1,00**	**1,62**
		1	*7,20E+10*	**1,04**	**1,71**
		10	*3,75E+108*	**1,47**	**2,74**
		30		**3,16**	**7,75**
		60		**10,02**	**36,98**

On constate donc trois choses :

- Le modèle **sans neutrons retardés** est **totalement inexact**, les neutrons retardés participent pleinement à la vie du réacteur et permettent une cinétique raisonnable.

- Le modèle **tenant compte des neutrons retardés** au niveau du temps de génération permet une **approche très simplifiée** de la cinétique uniquement pour de **très faibles écarts à la criticité** : déjà pour 100 pcm on fait une erreur (sous-estimation, pas dans le sens de la sûreté) de moins d'un octave en une minute ; pour 250 pcm, c'est deux octaves !
- Seul le **modèle exact** est bien sûr capable de rendre compte de ce qui se passe d'autant plus que la réactivité est importante bien sûr.

On constate que le saut prompt est visible uniquement pour des durées inférieures à une ou deux secondes. On dit souvent que l'approximation du saut prompt revient à considérer le temps de vie des neutrons prompts comme infiniment court.

2. Populations stationnaires et milieu sous-critique

On considèrera un milieu sous-critique de coefficient multiplicateur $k<1$ dans lequel est placée une source de neutrons produisant (S) neutrons par seconde et par cm^3.

Ecrire les bilans en neutrons et en précurseurs, et déterminer les conditions pour lesquelles ces populations peuvent être stationnaires.

Pour envisager une valeur à l'équilibre de la population de neutrons, faisons donc un bilan sous la forme :

variations = apparitions - disparitions

Plaçons nous d'abord à l'instant **t = 0 s** et regardons ce qui se passe à l'instant $t = l_0$ [s] (durée de vie des neutrons dans le cœur). On ne tient pas compte des précurseurs dans ce cas puisqu'ils participent comme les autres aux interactions et sont pris dans le bilan du K effectif. Comme **k est proche de 1**, on fera l'hypothèse que la durée de vie des neutrons et le temps de génération des neutrons restent confondus.

- A $t = 0$ s, la population de neutrons est $n(t)$,
- A $t = l_0$ s, la population de neutrons est $n(t + l_0)$.
- A $t = l_0$ s, il disparaît $n(t)$ neutrons et il en apparaît : $k \cdot n(t) + S_0 \cdot l_0$

L'équation bilan s'écrit : $n(t + l_0) - n(t) = k \cdot n(t) + S_0 \cdot l_0 - n(t)$

On peut écrire : $n(t + a) - n(t) = \frac{dn(t)}{dt}.a$ ce qui revient à faire l'approximation du taux de croissance par la dérivée de la fonction au moment observé. D'où, l'équation bilan qui devient : $\frac{dn(t)}{dt} - \frac{k-1}{l_o}.n(t) = S_o$

La résolution de cette équation passe par l'équation différentielle du premier ordre sans second membre : $\frac{dn(t)}{dt} - \frac{k-1}{l_o}.n(t) = 0$

Cette équation a pour solution : $n(t) = A.\exp\left(\frac{k-1}{l_o}.t\right)$

Une solution particulière de l'équation (1) est : $\boxed{n(t) = -\frac{S_o.l_o}{k-1}}$

La solution générale de l'équation **générale** est bien sûr la somme de l'équation différentielle du premier ordre sans second membre et de la **solution particulière de l'équation avec second membre soit** $n(t) = A.\exp\left(\frac{k-1}{l_o}.t\right) - \frac{S_o.l_o}{k-1}$

Pour s'adapter à la réalité, on déterminera la constante A avec les conditions aux limites **(conditions aux limites soit** à t = 0 s ; n (0) = n_0**).**

$$n_0 = A - \frac{S_o.l_o}{k-1} \Rightarrow \textit{solution générale} \quad n(t) = \left(n_0 + \frac{S_0\, l_0}{k-1}\right).\exp\left(\frac{k-1}{l_o}.t\right) - \frac{S_o.l_o}{k-1}$$

La population va donc rejoindre un équilibre lorsque les disparitions (milieu sous-critique) seront équilibrées par les apparitions grâce à la source.

A l'équilibre (apparitions = disparitions) on aura $\frac{dn(t)}{dt} = 0$ **.**

La population neutronique tend alors vers sa valeur d'équilibre : $\boxed{n_{équi} = \frac{S_o.l_o}{1-k}}$

Mais cette **valeur d'équilibre** ne peut exister que **sous deux conditions** :

- **Il existe une source S et le milieu est sous-critique (1-k < 0)…**c'est le cas d'un réacteur à l'arrêt, la source permettant de produire un taux de comptage minimal sur les chaînes de démarrage.

- **Il n'y a pas de source** et la stationnarité ne peut être obtenue que si le milieu est **juste critique**…cas d'un réacteur en puissance, quelque soit son niveau de puissance. La criticité ne donne aucune information sur le niveau de puissance.

3. Effet d'une source de démarrage en milieu sous-critique

On considère un milieu multiplicateur sous-critique dans lequel est placée une source de neutrons, indépendante du temps, qui débite S_0 neutrons par seconde et par cm^3.

- *Montrer que le nombre de neutrons en stationnaire dans le réacteur est proportionnel à :* $\frac{S_o l_o}{1-k}$ *avec k : coefficient de multiplication, l_0 : durée de vie des neutrons*

On reprend les calculs précédents… qui débouchent sur cette formule.
On peut alors faire apparaître la réactivité et le temps de génération comme dans les équations de la cinétique : $n = -\frac{S\, l^*}{\rho}$ La source assure un **taux de comptage minimal** sur les chaînes de démarrage. C'est son rôle. Mais **plus le réacteur est sous-critique**, moins les neutrons sont visibles par les chaînes de mesure placées à l'extérieur de la cuve…

Cette source doit donc être dimensionnée pour assurer ce comptage même à l'arrêt en fin de vie du chargement de combustible (*on verra plus loin dans le cours : aux conditions nominales et tous absorbants de contrôle introduits*).

On peut en profiter pour commenter l'importance de cette source par rapport aux **neutrons de fission spontanée…**

On sait que 1 g d'U235 évolue très lentement par fission spontanée. Il se produit environ **25 fissions spontanées par gramme d'U 235 et par seconde**. Ce sont donc des neutrons présents dans le réacteur à tout moment. Une tonne de combustible enrichie à 5 % fournit donc environ 1.5 10^4 neutrons par seconde, répartis sur tout le réacteur, et produits de façon **aléatoire**.

Une **source de démarrage**, **bien localisée**, fournie elle **au grand minimum 10^8 neutrons par seconde**. La localisation des chaînes de mesure, dites de démarrage, en surveillant une source ponctuelle, donc placée à proximité sur les bords du chargement, permet d'être sûr de pouvoir, en toutes circonstances, mesurer même de très bas flux, condition impérative pour **autoriser une divergence**. Cette source est donc indispensable pour la sûreté de la divergence.

4. Echelons de réactivité

On considère un milieu multiplicateur (c'est à dire pouvant donner des fissions) sans source. La population initiale est supposée critique, donc la réactivité est nécessairement nulle.

On impose un échelon de réactivité $\rho > 0$ pendant un intervalle de temps T.
Puis on redescend à la criticité.

- *En supposant que le saut-prompt (ou la chute-prompte) est immédiat (on dit aussi "approximation du saut-prompt", ou durée de vie des neutrons prompts nulle, voir dessin), calculer la densité de neutrons en fonction du temps.*

***Conseils :** reprendre les bilans. Lors d'une variation de réactivité (de ρ_0 à ρ), le mouvement "prompt" est donné par la formule plus générale $n_1 = \frac{\beta-\rho_0}{\beta-\rho} . n_o$ que l'on peut appliquer pour un temps très court. On dit alors que les neutrons prompts ont une durée de vie infiniment courte…*

On part d'une **situation juste critique, réactivité nulle et pas de source** (voir exercice 2). Si un échelon de réactivité est appliqué, la population va évoluer selon deux cinétiques :

- **une très rapide** (rééquilibre des neutrons prompts, ou **saut prompt**)
- puis **montée lente** de la population de neutrons sous l'effet de la **surcriticité**.

On admet que les neutrons prompts ont une **durée de vie très courte** (voir exercice 1), donc le **saut prompt est acquis instantanément**…

A t = 0+… la population n_0 devient immédiatement **corrigée du saut prompt** :

$$n_1 = \frac{\beta}{\beta-\rho} . n_o$$

On le constate sur les calculs exacts données dans l'exercice 1.

Puis la population va augmenter progressivement avec le **taux de croissance ω_o** fourni par l'équation de Nordheim…

$$\boxed{n(t) = \frac{\beta}{\beta-\rho} n_o \exp\left(\frac{\lambda.\rho}{\beta-\rho}.t\right)}$$ et cela **durant la durée T** du palier.

En fin de palier de réactivité, là la population est montée jusqu'à :

$$n(T)=\frac{\beta}{\beta-\rho}\,n_0\,exp\left(\frac{\lambda.\rho}{\beta-\rho}.T\right)$$

On suppose alors que les opérateurs ramènent la **réactivité à zéro** par un retour des grappes de commande à la position antérieure.

On est alors confronté à une **chute-prompte** d'amplitude **immédiate** égale à :

$$n(T+) = \frac{\beta-\rho}{\beta}\ .\ n(T)$$ comme cela est indiqué dans le cours.

La population ne peut que **rester stationnaire** une fois que les neutrons prompts se sont rééquilibré avec le **milieu juste critique**. Après ce saut de réactivité, et la **stabilisation très rapide**, on est donc en face d'une densité de neutron égale à :

$$n\ stationnaire=\frac{\beta}{\beta-\rho}\,\frac{\beta-\rho}{\beta}n_0\,exp\left(\frac{\lambda.\rho}{\beta-\rho}.T\right)=n_0\,exp\left(\frac{\lambda.\rho}{\beta-\rho}.T\right)$$

C'est donc par des à-coups de réactivité que l'on peut faire monter très progressivement la population. On constate que le saut-prompt est totalement effacé par cette opération.

6. Questions à réviser

Caractéristiques sur les neutrons (à connaître) :

Fissions thermiques :
Neutrons prompts :
Nombre :
Energie cinétique moyenne :
Domaine de répartition de cette énergie :
Neutrons retardés :
Nombre :
Retard d'apparition par rapport à la fission :
Energie cinétique moyenne :
Domaine de répartition de cette énergie :

Précurseurs, caractéristiques nucléaires (durée de vie, fraction).

Réaction nucléaire et intérêt d'une source de démarrage.

Durée de vie d'un neutron et temps de génération (définitions, calculs, ordre de grandeur, lien entre ces deux temps).

Savoir écrire les bilans en neutrons et en précurseurs.

Courbe de Nordheim (à bien connaître) : origine, utilisation, approximations.

Circonstances conduisant à la prompt criticité : coefficient de croissance.

Saut-prompt et chute-prompte : valeur en fonction de la réactivité.

Savoir expliquer l'approche sous-critique.

Notion de temps de doublement et octavemètre.

Coefficient de croissance de la population après les sauts-prompt.

Savoir commenter les enregistrements de la pile de Fermi.