

Exercice sur les produits de fission

1. Expressions et valeurs numériques des densités N_{UO_2} , N_5 , N_O :

Commençons par déterminer la densité N_{UO_2} .



Avec : $A_{UO_2} = 2.A_O + e.A_5 + (1 - e).A_8$

$$A_{UO_2} = 269,91 \text{ g} \cdot \text{mole}^{-1} \quad N_{UO_2} = 2,32 \cdot 10^{22} \text{ noyaux} \cdot \text{cm}^{-3}$$

$$N_5 = e \cdot N_{UO_2} = e \cdot N_U \quad N_5 = 6,96 \cdot 10^{20} \text{ noyaux} \cdot \text{cm}^{-3}$$

$$N_O = 2 \cdot N_U = 2 \cdot N_{UO_2} \quad N_O = 4,64 \cdot 10^{22} \text{ noyaux} \cdot \text{cm}^{-3}$$

2. Concentration à l'équilibre pour le xénon et le samarium :

Calculons l'expression de la concentration du xénon à l'équilibre.
équations bilan du xénon :

$$\begin{cases} \frac{dI}{dt} = (\gamma_I \cdot N_f \cdot \sigma_f \cdot \Phi) - \lambda_I \cdot I \\ \frac{dXe}{dt} = (\gamma_{Xe} \cdot N_f \cdot \sigma_f \cdot \Phi) + \lambda_I \cdot I - (\lambda_{Xe} + \sigma_{a,Xe} \cdot \Phi) \cdot Xe \end{cases} \quad (1)$$

Soient I_∞ et Xe_∞ les concentrations en iode et xénon à l'équilibre.

A l'équilibre, les concentrations en iode et xénon n'évoluent plus dans le temps.

$$\frac{dXe}{dt} = \frac{dI}{dt} = 0 \quad (2)$$

$$Xe_\infty = \frac{(\gamma_{Xe} + \gamma_I) N_5 \cdot \sigma_{f5} \cdot \Phi_c}{\lambda_{Xe} + \sigma_{a,Xe} \cdot \Phi_c} \quad Xe_\infty = 7,95 \cdot 10^{15} \text{ noyaux} \cdot \text{cm}^{-3}$$

Expression de la concentration du samarium à l'équilibre.

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = \gamma_P \cdot N_f \cdot \sigma_f \cdot \Phi - \lambda_P \cdot P \\ \frac{dSm}{dt} = \lambda_P \cdot P - \sigma_{a,Sm} \cdot \Phi \cdot Sm \end{cases} \quad (3)$$

Soient P_∞ et Sm_∞ les concentrations en prométhéum et samarium à l'équilibre.

A l'équilibre, les concentrations en prométhéum et samarium n'évoluent plus dans le temps.

$$\frac{dP}{dt} = \frac{dSm}{dt} = 0 \quad (4)$$

$$Sm_\infty = \frac{\gamma_P \cdot N_5 \cdot \sigma_{f5}}{\sigma_{a,Sm}} \quad Sm_\infty = 1,08 \cdot 10^{17} \text{ noyaux} \cdot \text{cm}^{-3}$$

3. Concentrations $S_m(t)$ et $\rho_m(t)$ au démarrage du réacteur

On suppose que le prométhéum a atteint sa concentration à l'équilibre P_∞ .

$$P_\infty = \frac{\gamma_P \cdot \Sigma_f \cdot \Phi}{\lambda_P}$$

Pour $S_m(t)$, il faut résoudre l'équation différentielle (1) :

$$\frac{dS_m(t)}{dt} = \lambda_P \cdot P - \sigma_{c,S_m} \cdot S_m \cdot \Phi = \gamma_P \cdot \Sigma_f \cdot \Phi - \sigma_{c,S_m} \cdot S_m \cdot \Phi$$

équation sans second membre (2) $\frac{dS_m(t)}{S_m} = -\sigma_{c,S_m} \cdot \Phi \cdot dt$

Cette équation admet pour solution : $S_m(t) = A \cdot e^{-\sigma_{c,S_m} \cdot \Phi \cdot t}$ A constante

La solution particulière de l'équation (1) est une constante de la forme : $\frac{\gamma_P \cdot \Sigma_f}{\sigma_{c,S_m}}$

La solution générale de l'équation (1) est la somme de sa solution particulière et de la solution de l'équation sans second membre.

$$S_m(t) = A \cdot e^{-\sigma_{c,S_m} \cdot \Phi \cdot t} + \frac{\gamma_P \cdot \Sigma_f}{\sigma_{c,S_m}}$$

On détermine la constante A avec la condition initiale $S_m(t=0) = 0$ car on suppose qu'il n'y a pas de poison provenant de la fission, dans le réacteur au démarrage. La solution générale de l'équation (1) s'écrit finalement :

$$S_m(t) = \frac{\gamma_P \cdot \Sigma_f}{\sigma_{c,S_m}} \cdot (1 - e^{-\sigma_{c,S_m} \cdot \Phi \cdot t})$$

On peut alors établir l'expression de l'évolution de l'antiréactivité $\rho_{S_m}(t)$ apportée par le poison samarium dans le réacteur.

$$\rho_{S_m}(t) = -\frac{\sigma_{a,S_m} \cdot S_m(t)}{\nu \cdot \Sigma_f}$$

En remplaçant $S_m(t)$ par son expression dans la dernière relation et en remarquant que $\sigma_{a,S_m} = \sigma_{c,S_m}$ (car le samarium ne fissionne pas), on obtient :

$$\rho_{S_m}(t) = -\frac{\gamma_P}{\nu} \cdot (1 - e^{-\sigma_{a,S_m} \cdot \Phi \cdot t})$$

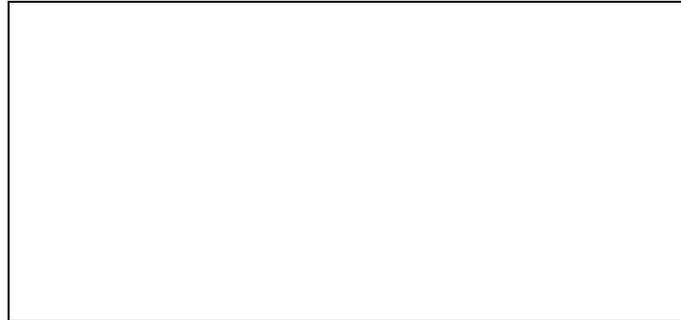
L'antiréactivité $\rho_{S_m,\infty}$ apportée par le poison samarium dans le réacteur à l'équilibre [Obtenue pour $t = \infty$ dans $\rho_{S_m}(t)$] vaut donc :

$$\rho_{S_m,\infty} = -\frac{\gamma_P}{\nu} \quad \rho_{S_m,\infty} = -454 \text{ pcm}$$

Le samarium apporte donc une antiréactivité de -454 pcm dans le réacteur à l'équilibre, et cette valeur est totalement indépendante du flux.

4. Etablir $P(t)$, $Sm(t)$ et $\rho_{Sm}(t)$ après l'arrêt brusque du réacteur

La puissance et le flux évoluent de la façon suivante :



On choisira l'instant ($t = 0$ s) où l'on arrête le réacteur, comme origine des temps pour résoudre nos équations. Nous connaissons les conditions initiales pour ce qui concerne la concentration des poisons, car le réacteur avant l'arrêt était à l'équilibre. Nous utiliserons l'indice 1 et l'indice 2 pour caractériser l'état du réacteur respectivement au démarrage et lors de l'arrêt brusque. Ces conditions initiales s'expriment sous la forme :

$$\boxed{\hspace{10em}} \quad (1)$$

Le réacteur s'arrêtant brusquement (**Le flux Φ devient nul**), les équations différentielles d'évolution du prométhéum et du samarium s'écrivent :

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = -\lambda_p \cdot P & \rightarrow (a) \\ \frac{dSm}{dt} = \lambda_p \cdot P & \rightarrow (b) \end{cases}$$

Réolvons tout d'abord l'équation différentielle **(a)** concernant le prométhéum. Cette équation est une équation différentielle du premier ordre à coefficients constants. La solution de l'équation **(a)** s'écrit : $P(t) = A \cdot e^{-\lambda_p \cdot t}$

On détermine la **constante A** : $P(t = 0) = P_{\infty,1} = \frac{\gamma_p \cdot N_f \cdot \sigma_f \cdot \Phi_1}{\lambda_p}$

L'équation d'évolution du prométhéum s'écrit : $P(t) = \frac{\gamma_p \cdot N_f \cdot \sigma_f \cdot \Phi_1}{\lambda_p} \cdot e^{-\lambda_p \cdot t}$

Où Φ_1 représente le flux avant l'arrêt du réacteur. On peut maintenant déterminer l'évolution du samarium en remplaçant $P(t)$ dans l'équation **(b)** par sa valeur trouvée ci-dessus. On obtient l'équation à résoudre suivante :

$$\frac{dSm}{dt} = \gamma_p \cdot N_f \cdot \sigma_f \cdot \Phi_1 \cdot e^{-\lambda_p \cdot t}$$

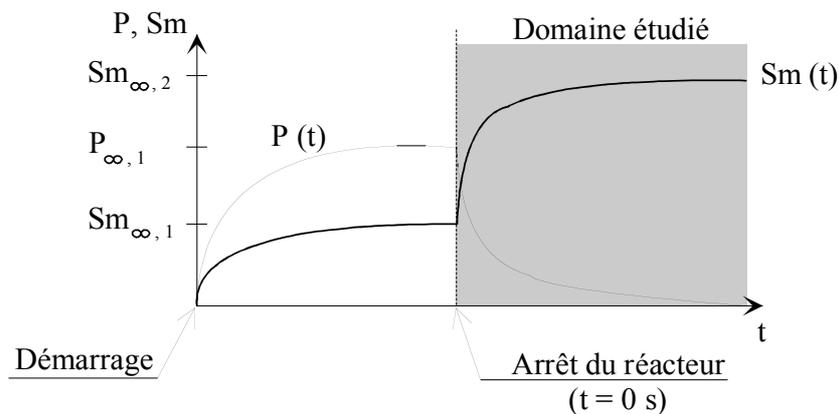
On intègre cette dernière équation . $S_m(t) = B - \frac{\gamma_p \cdot N_f \cdot \sigma_f \cdot \Phi_1}{\lambda_p} \cdot e^{-\lambda_p \cdot t}$

La **constante B** est : $S_m(t=0) = S_{m\infty,1} = \frac{\gamma_p \cdot N_f \cdot \sigma_f}{\sigma_{a,Sm}}$

On en déduit alors l'expression finale (c) de l'évolution du samarium après l'arrêt

du réacteur : $S_m(t) = \frac{\gamma_p \cdot \Sigma_f}{\sigma_{a,Sm}} + \frac{\gamma_p \cdot \Sigma_f \cdot \Phi_1}{\lambda_p} \cdot (1 - e^{-\lambda_p \cdot t}) \rightarrow (c)$

La représentation graphique de l'évolution du samarium à partir de l'instant où le réacteur est arrêté brusquement se présente sous la forme :



On peut calculer la nouvelle concentration en samarium à l'équilibre **Sm_{∞,2}** dans le réacteur en posant **t = ∞** dans l'expression (c) précédente concernant l'équation d'évolution du samarium **Sm(t)**. La nouvelle concentration en samarium à

l'équilibre **Sm_{∞,2}** s'écrit : $S_{m\infty,2} = \gamma_p \Sigma_f \left(\frac{1}{\sigma_{a,Sm}} + \frac{\Phi_1}{\lambda_p} \right)$

Connaissant l'expression de la concentration en samarium (c), nous pouvons en déduire l'évolution de l'antiréactivité **ρ_m(t)** correspondante apportée dans le cœur du réacteur par ce poison.

$$\rho_m(t) = - \frac{\sigma_{a,Sm} \cdot S_m(t)}{v \cdot \Sigma_f}$$

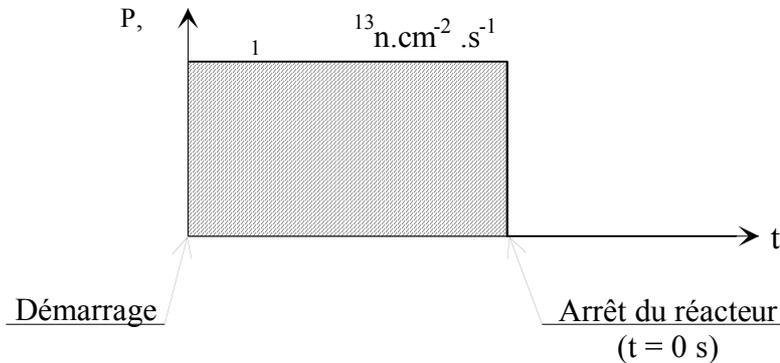
soit : $\rho_m(t) = \frac{\gamma_p}{v} + \frac{\gamma_p \cdot \sigma_{a,Sm} \cdot \Phi_1}{\lambda_p \cdot v} \cdot (1 - e^{-\lambda_p \cdot t})$

A l'équilibre (**t = ∞**), l'antiréactivité apportée par le samarium vaut :

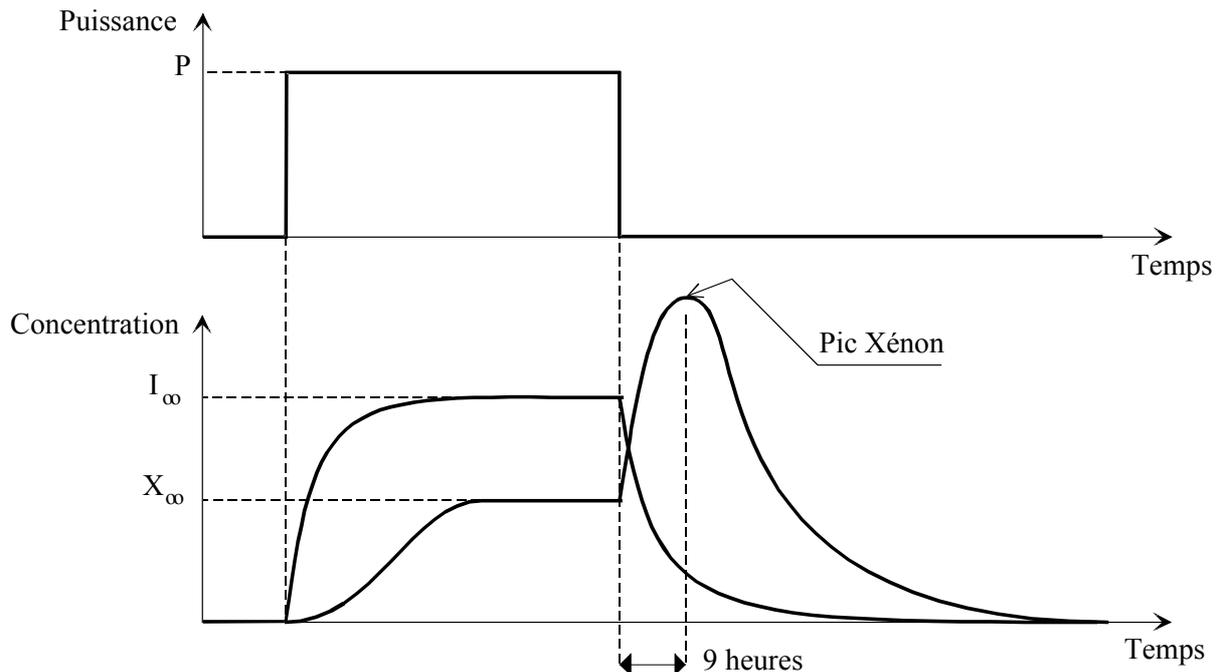
$$\rho_{m\infty,2} = - \frac{\gamma_p}{v} \cdot \left(1 + \frac{\sigma_{a,Sm} \cdot \Phi_1}{\lambda_p} \right) \quad \rho_{m,\infty,2} = -614 \text{ pcm}$$

5. Antiréactivité apportée par le poison xénon au niveau du pic

La puissance et le flux évoluent comme sur le schéma ci-dessous, quand on arrête le réacteur après un fonctionnement prolongé.



Calculons, tout d'abord, l'**antiréactivité limite** ($t = \infty$) introduite par le xénon à l'arrêt du réacteur. L'expression de l'évolution du xénon en fonction du temps (à partir du moment où le réacteur est arrêté) est donnée dans l'énoncé. La représentation graphique de cette concentration xénon est de la forme :



La concentration en noyaux xénon après le pic va en **diminuant** jusqu'à être pratiquement nulle. De ce fait, l'**antiréactivité limite** (à l'équilibre) peut être considérée comme **nulle**.

Le pic xénon représente l'**extrémum** (ici un maximum) de cette fonction $Xe(t)$.

Le **temps t_{pic}** au bout duquel on obtient le pic xénon est

$$\frac{dX_e(t)}{dt} \Big|_{t=t_{pic}} = 0 \quad t_{pic} = \frac{1}{\lambda_I - \lambda_{Xe}} \cdot \ln\left(\frac{\lambda_I}{\lambda_{Xe}}\right) \quad t_{pic} = 40128 \text{ s} = 11 \text{ h } 8 \text{ min } 24 \text{ s}$$

L'**antiréactivité apportée** par le xénon au niveau du pic, connaissant le temps **t_{pic}** au bout duquel on a atteint le sommet du pic xénon et l'évolution de la concentration en noyaux de poison xénon en fonction du temps, est :

$$\rho_{pic} = -\frac{\sigma_{a,Xe} \cdot X_e(t=t_{pic})}{\nu \cdot \Sigma_f} \quad \rho_{pic} = -\frac{(\gamma_I + \gamma_{Xe}) \sigma_{a,Xe} \cdot \phi}{\nu} \cdot \left(\frac{e^{-\lambda_{Xe} \cdot t_{pic}} - e^{-\lambda_I \cdot t_{pic}}}{\lambda_I - \lambda_{Xe}} \right) \quad \rho_{pic} = 3295 \text{ pcm}$$

L'antiréactivité apportée par le xénon étant très grande, il faut prévoir dans le cœur une réserve de réactivité importante pour pouvoir diverger à tout moment.